I-17　せん断変形を考慮したはり要素の剛性方程式の誘導について

東京大学　学生員　岩熊哲夫
東京大学　正　員　西野文雄

はり理論では，曲げモーメントによる変形に比べて，せん断力による変形は小さいとして無視されることが多い。しかし，断面寸法に比べはりの長さが相対的に短くなるにつれて，せん断変形の影響は大きくなる。曲げを受けるはりのせん断変形を考慮した理論は，主に振動問題について古くから研究されており，一般にTimoshenkoはりと呼ばれる。

Timoshenkoはりの支配方程式は，3次元弾性論の仮想仕事の原理に，適切な運動場を代入して得られる1次元の仮想仕事の式，

$$\int_z \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}\, dz - \int_z \delta \boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{X}\, dz - \left[\delta \boldsymbol{\ell}^T \cdot \mathbb{T}\right]_{boundary} = 0 \qquad (1)$$

から求めることができる。変位表示のつり合い式の一般解は容易に求まり，境界条件を用いて厳密な剛性方程式が求まる。有限要素法による定式化も式(1)を各要素に対して用いればよく，適切な変位関数を仮定することによって，近似の要素剛性方程式が次の形で求まる。

$$\mathbb{T} = \mathbb{k} \cdot \boldsymbol{\ell} - \mathbb{T}_0 \qquad (2)$$

ここに，$\mathbb{T}_0$は分布外力$\boldsymbol{X}$に関する等価節点外力である。変位関数の仮定では，式(1)の第3項の$\boldsymbol{\ell}$の成分を未定定数に持ち，第1項のひずみエネルギーに現われる微係数の最高階数で多項式の次数を決めればよい。一般のはり理論では，これだけの条件で厳密な剛性方程式が得られる。Timoshenkoはりでは，斉次解が多項式であるにもかかわらず，この条件では低次の多項式しか得られず，求められる剛性方程式も厳密でないため，変位関数の改良が必要となる。その1つの方法として，未定定数として$\boldsymbol{\ell}$の成分以外のパラメータを用いて高次多項式で仮定すればよい。その時，式(1)の第3項より明らかなように，新しく選んだパラメータに対応する節点外力成分は零であるから，そのパラメータに関して剛性マトリックスの静的縮小を行なうことができ，式(2)の形の剛性方程式が求まる。Timoshenkoはりに対しては，高次要素を用い静的縮小を行なわない限り，普通の方法では厳密な剛性方程式は得られない。つり合い式の斉次解は高次要素となっており，これを変位関数として選べば，当然ながら厳密な剛性方程式が得られ，その節点での値は厳密解となる。

Timoshenkoはりの振動問題を有限要素法を用いて解析した結果がいくつか報告されているが[*)]，固有値問題を対象としているため，剛性マトリックスそのものに対する議論はほとんどなされていない。前記のような高次要素を用いた場合，式(1)の第2項が慣性力項となり整合質量マトリックスを用いると，新しく選んだパラメータに関する，マトリックスの縮小が行なえず，運動方程式の未定定数に$\boldsymbol{\ell}$の成分以外のパラメータが残る。前記の諸論文では，自由振動を対象としているため，節点外力ベクトルの成分について明確に示していない。そのため，例えば$\boldsymbol{\ell}$以外のパラメータとして両端のせん断変形を用いた高次要素の場合，それらに対する節点外力成分は零であるにもかかわらず，片持ちばりの自由端に対する力学的な境界条件を，これらのパラメータに課している。さらに，このパラメータは式(1)からも明らかなように，要素間での連続条件は無いにもかかわらず，全体剛性方程式を組み立てる時，単純に直接剛性法を用いている。これは式(1)を正当に評価していないことによる混乱と思われる。

*) Thomas, J. and B. A. H. Abbas : Finite element model for dynamic analysis of Timoshenko beam, Journal of Sound and Vibration, Vol. 41., No. 3, pp291-299, 1975.