I-16　場の問題におけるアナロジー力学系とその行列表現

名古屋大学工学部　正員　川本朓万　　正員○富樫 豊

I。序。 近年，建設工学において対象となる構造物の大型化，重量化に伴い，入力外乱形態の多様化，系の形状的複雑さ，系に対する諸判断基準の多様化がみられるようになった。これに伴って，扱う場は，熱伝導，流体固体変形場等で複合化されてきた。例えば，ロックフィルダムの耐震問題では，図1に示すように，フィル材の大小さまざまの粗粒形態，ダム本体と岩盤との境界，水との境界，入力外乱として，熱，重力，位相差地震力等が系の構成の因子である。このような系では，場の方程式をつくること自身が難しく，また系に対する解析の実行，設計作業がきわめて困難となっている。これは，系の複雑さ，大型化に原因するものであるから，次の二つのアプローチにより，乗り超えられると考えられる。すなわち，第一は，実験，実測等により，巨視的に現象を把握し，統計的に体系の情報化を行う考えである。第二は，第一とはまったく逆で，対象の構成する場を力学的に単純化する，いわゆる現象予測の単純力学系を構成する微視的な考えである。

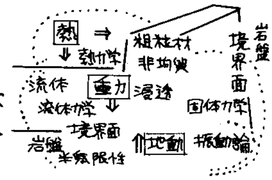

図1．ロックフィルダムの解析系

著者らは，大型系に対し，第二の立場から，解析法の単純化を公理力学により考察した[1]。本論文ではこれに引続いて，時間項を省略した線形系で，記号化された作用子により，単一場の構成理論を簡潔に表現し，単一場の作用子に関する二次形式性のアナロジーのもとに，場の複合，分解，近似に関する理論を創る。

II。場の構成。 我々の扱う場には，熱伝導等のスカラー場，固体変形等のベクトル場がある。各場において，体積及び境界の外作用と時間作用の省略を基準として，場の基本方程式について考察する。 A。スカラー場 ナブラ∇，場の変量ϕ，高次の（ベクトル）量$\varepsilon=\nabla\phi$，同第二の量$\sigma=D\varepsilon$，正値対称行列Dとし，場の方程式は$\nabla^tD\nabla\phi=0$ …(1) となる。この式は作用子に関して二次形式である。 B。ベクトル場。∇をテンソル作用子$\bar{\nabla}$に，ϕをベクトルuにし，基本方程式が $\bar{\nabla}^tD\bar{\nabla}u=0$ …(2) になるとする。場が変形体の場であれば，$\bar{\nabla}$は，Pを巡回作用子，∂を微分作用子として，$\bar{\nabla}=\{\partial+(\partial P+P\partial)\}$，行列表現では $\bar{\nabla}=\begin{bmatrix}\partial_1&0&0&\partial_2&0&\partial_3\\0&\partial_2&0&\partial_1&\partial_3&0\\0&0&\partial_3&0&\partial_2&\partial_1\end{bmatrix}$ …(3) であり，Dを構成行列として，力のつりあい式は式(2)となる。式(2)からは，エネルギーの概念が直ちに見い出せる。

C。一般の場。場の変量ϕが与えられる世界を基準次とし，その量より作られる量 $\varepsilon=\bar{\nabla}\phi$，$\delta=\bar{\nabla}^t\sigma$ を高次世界の量とし，そこには，$\sigma=D\varepsilon$ の関係があるとし，また両世界の結びを$\bar{\nabla}$で表す。定義域Ωを内部Ωと境界$\partial\Omega$とに分けると，場の方程式は，${}_{\Omega}\bar{\nabla}^tD\bar{\nabla}\phi+{}_{\partial\Omega}\bar{\nabla}^tD\bar{\nabla}\phi={}_{\Omega}0$ …(4)となる。次に，複数個の単一場から成る場を考える。基準次に$\mathfrak{E}$，作用子に$\mathfrak{f}$，高次に$\mathfrak{g}$の各概念的なベクトルを導入すると，場の量，作用子等は，$\Phi=(\phi^{0}_{a_1}+\phi^{0}_{a_2}+\cdots)+(\phi^{1}_{a_1}+\cdots)+\cdots$，$\bar{\nabla}=\nabla\mathfrak{f}^0+\bar{\nabla}\mathfrak{f}^1+\cdots$，$\sigma=\sigma\mathfrak{E}^0+\sigma\mathfrak{E}^1+\cdots$ …(5)である。$\mathfrak{E},\mathfrak{f},\mathfrak{g}$の間の関係を規定する積を$\otimes$で表し，この積を，高次の世界の関係式 $\sigma=\otimes\mathbb{D}\otimes\varepsilon$ …(6) に対して適用すると，基本方程式は，$\bar{\nabla}^t\otimes\mathbb{D}\otimes\bar{\nabla}\phi=0$ …(7) になる。この方程式の解析的な構成として，図2の表現を定義する。

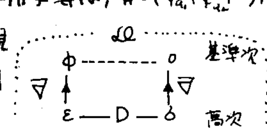

図2．場の解析的構造

III。場の近似。 A。離散場。領域Ωの任意の位置で定義されるϕ，σを，有限個の点を補間点とする定義域Ω'でのΦ，Dにより，$\phi=DC\Phi$，$\sigma=DC\,D$ …(8) と表される。ここに DCは，離散化作用子とし，DC^tDCでΩ'における体積分を意味するとする。Ωの基本方程式 ${}_{\Omega}\bar{\nabla}^tD\bar{\nabla}\phi={}_{\Omega}0$ に式(8)を代入すると，${}_{\Omega'}DC^t\bar{\nabla}^tD\bar{\nabla}\phi={}_{\Omega'}0$ 。ここでガラーキンの規則として $DC^t\bar{\nabla}^t=-(\bar{\nabla}DC)^t$ …(9) を採りると ${}_{\Omega'}(\bar{\nabla}DC)^tD(\bar{\nabla}DC)\Phi={}_{\Omega}0$ …(10) が得られる。これは，Bを歪補間行列として，剛性行列 $K=\int B^tDB\,dvol$ による $K\Phi=0$ の式そのものであり，解析的な構造で表現すると図3のようになる。

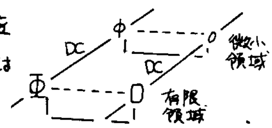

図3．場の近似

B。半離散場。場の近似を解析関数展開と離散化により行う考えは，半解析法と呼ばれ，以下の三つがある。(i)。Finite Prism Method。場をフーリエ展開と離散化とにより $\phi=DC\,E\,\Phi$ …(11) と表す。基本方程式は，

$((\nabla E)\mathbb{C})^t D((\nabla E)\mathbb{C})\phi = 0$ …(12)となる。(ii)。場の重合。ある特定の条件のもとでの解析解を$E\phi_2$とすると，場の近似は　$\phi = \mathbb{C}\phi_1 + E\phi_2$ …(13)となり，基本方程式は，その条件がその他の条件と連成しない場合，$(\nabla\mathbb{C})^t D(\nabla\mathbb{C})\phi_1 + (\nabla E)^t D(\nabla E)\phi_2 = 0$ …(14)になる。上式第二項の式を単独に零として　$E\phi_2$をきめ，次いでϕ_1をきめる。この考えは，後に述べる順序化解析で，第一番が$E\phi_2$の系で，第二番が$\mathbb{C}\phi_1$の系であることに対応する。

(iii)。領域の区分化。解析領域が二つ（以上）に分けられるとする，$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ …(15)。基本方程式は，Ω_1とΩ_2の境界で輸送項$\Gamma\phi$を評価して，${}_{\Omega}\nabla^t D\nabla\phi + {}_{\partial(\Omega_1+\Omega_2)}(\Gamma\phi - \Gamma\phi) + {}_{\Omega_2}\nabla^t D\nabla\phi = {}_{\Omega}0$ …(16)になる。また，輸送項が直接関係しないΩをΩ_1とすると，Ω_1において　$\nabla^t D\nabla$ の作用子を統合化できる。これと(ii)を組合せることもできる。

4。場の組立て。

場の組立てとして，単一場の連成化と複雑な単一場の重合化について考える。 A。連成化。簡単のため，二つの単一の場として，スカラー場ϕ^0とベクトル場ϕ^1との連成のみを扱う。状態量ϕ，零0，作用子∇，構成行列$\mathbb{D}$は　$\phi = \phi^0 e^0 + \phi^1 e^1$，$0 = 0e^0 + 0e^1$，$\nabla = \nabla f^0 + \nabla f^1$，$\mathbb{D} = \mathbb{D}^{00}_{e_0 g_0} + \mathbb{D}^{01}_{e_0 g_1} + \mathbb{D}^{10}_{e_1 g_0} + \mathbb{D}^{11}_{e_1 g_1}$ …(17)であり，基本方程式は，$\nabla^t \otimes \mathbb{D} \otimes \nabla\phi = 0$ …(18)となる。この方程式は，スカラー場での基本方程式　$\nabla^t D^0 \nabla\phi^0 = 0$　とベクトル場でのそれ　$\nabla^t D^1 \nabla\phi^1 = 0$　において，輸送項をD'として，基準次から高次への結び∇を介して連成下の行列$\mathbb{D}$に加えて，$\mathbb{D}$を$\begin{bmatrix} D^{00} & D^{01} \\ D^{10} & D^{11} \end{bmatrix}$　とすることに対応し，従って，解析的な構造は，図4のようになる。

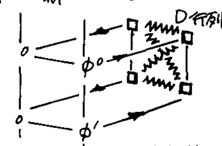

図4、連成場の解析的構造

B。複雑な場の連成単純化。(i)。巨視化。場の構成が二重構造を有しているとき，すなわち，基準オーダーとそれより小さいオーダーの二つの系が互いに関連しているとき（例えば粒状体系），後者の系には指標ℓをつけて，基本方程式は　$(\nabla^\ell)^t D^\ell \nabla^\ell u^\ell = 0$ …(19)である。ここで，小オーダー系から基準オーダー系への変換を　$u = \mathrm{Macro}(u^\ell)$ …(20)とすると，基準オーダー系の基本式は，補正項D'，Γ　を伴って，$(\nabla + \Gamma)^t (D + D')\nabla u = 0$ …(21)と表される。この構造図は図5である。

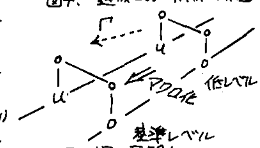

図5、場の巨視化

(ii)。場の重合。場の量uを二つ（以上）の量ϕ_1，ϕ_2で表す。これは　一般に　$u = F(\phi_1, \phi_2)$ …(22)と書け，直和型なら　$u = F_1(\phi_1) + F_2(\phi_2)$ …(23)，もっとも簡単には　$u = \phi_1 + \phi_2$ …(24)となる。基本方程式は，状態量の場の重ね合せに応じて一般の場合，$\mathbb{F}^t \nabla^t D \nabla \mathbb{F}\phi = 0$ …(25)となり，図6の構造図をもつ。変形体力学ではしばしば，場を剪断と伸張とに分ける。この場合，式(23)のFを$\nabla\cdot$と$\nabla\times$　にすると，式(25)は，非連成の二つの方程式となる。また高次変形体では，式(23)，混合体では，式(24)により，場が生成される。そこにおいて，輸送運動量を$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$の連成型で表現すると，構成式における並進，回転による剛性の単調増加性は，きえる。

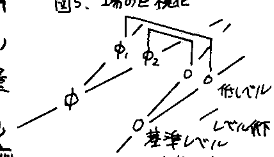

図6、場の連成単純化

5。場の分解。

A。順序付分解。一般の場がいくつかの単一の連成した場であるとし，さらに場が次のように分解できるとする，(複合系)=(単純系)+(引継ぎ系)+(単純系)+… …(26)。分解した系に順序番号nをつける。i番目の系で，引継ぎ系を$\Gamma_{n_{i+1}}$とすると，基本式は，$(\nabla^t D\nabla_{m_i} + \Gamma_{n_{i+1}})\phi_{n_i} = 0$ …(27)となる。解析実行にあたり，順序番号に従い，反復，非反復で単一系の方程式を解く。この考えは，複合場のみならず，単一場そのものにおいても適用できる。例えば，三次元波動伝播基本式は，(二次元基本式)+(波動の二次元基本式)=0 …(28)と直和型表現される。また非線形性の線形化表現も可能である。(ii)。領域分解。構造物と岩盤の相互作用問題においてみられるように，主系と従系とから成る系は，定義域 $\Omega = \Omega_{main} + \Omega_{SUB}$ …(29)をもつ。ここで，$\Omega = \Omega_{main} + (\Omega_{main} + \Omega_{SUB})_{couple}$ …(30)とすると，基本式は，順序番号により，${}_{couple}(\nabla^t D\nabla\phi + \Gamma)_{m_1} + {}_{\Omega_{main}}(\nabla^t D\nabla\phi - \Gamma\delta(\mathrm{point}))_{m_2} = 0$ …(31)となる。(iii)。因子の不活性化。単一場のみの外力項，連成分解のときの生成補助項の単純化は，単一場外力，あるいは，∇作用子に順じた構成行列Dへの修正としてなされる。(iv)。非平衡系。平衡系の解析的構造を摂動させた非平衡状態が，崩壊系とする。両状態の間には，$\nabla \to \nabla + \Gamma$，$D \to D + D'$ …(32)があるとして，崩壊を含む現象を順序化番号により段階的に表現すると，崩壊系を単一場で表現できることになる。

6。結び。

本論文により大型系の場の構成分解，近似の理論が構築された。今後は，非線形，不安定現象，慣性，減衰等について考慮し，より具体化論を開発する。謝辞。松尾稔助教授，島田静男助教授，多賀直恒助教授，当研究室の林谷孝久氏，中西信輔氏，西田俊一氏，土木工研の諸氏に感謝の意を表します。

A。参考文献。[1] 川本，多賀，富樫“地盤工学における解析法の簡単化”11回土質工学大会 1976，P509–512 [2] 川本，富樫“掘削・盛土の安定解析に関する一考察”土木学会中部支部研 1974，P173–174