I-14　深さ方向に弾性係数が変化する半無限体への剛体押し込み問題

大阪市立大学　正員　○小林 治俊
〃　　〃　　園田 恵一郎

[1] まえがき　等方均質な半無限体への剛体押し込み問題は、良く知られた Sneddon[1], 半岐[2] による解析があり、多層弾性体に対しては、松岡・能町[3] による解析がある。ところで、実際地盤のように弾性定数が深さと共に変化する問題を等方非均質体として取り扱った例は、古くは花村[4], Ter-Mkrtich'ian[5] の研究があるが、これらは限られた軸対称問題であり、剛体の押し込み問題の解析はない。最近 Kassir[6] らによって、セン断係数が深さ z のべき乗で表わされ、Poisson比とべき乗数との間に特別な関係のある場合について解が求められている。本文は、セン断係数が深さ z の e 関数で変化するが、Poisson比は一定であるような等方非均質体の3次元弾性問題のねじりも含めた場合の一般的な変位関数を決定し、半無限体への剛体押し込み問題の一般解を提示する。

[2] 3次元解析の基礎方程式　セン断係数 G が次式で表わされるものとする。　$G(z)=G_0e^{\alpha z}$ ……(1)　G_0：地表でのセン断係数，$\alpha=\alpha'/c$ で c は $z=c$ で $G=G_0e^{\alpha'}$ となる深さ。α' の変化に対する $G(z)$ の様子を図1に示す。円筒座標で表わした応力-変位関係は、通常の等方均質体の場合のセン断係数と(1)式で表わされる $G(z)$ を置換することにより次式となる。

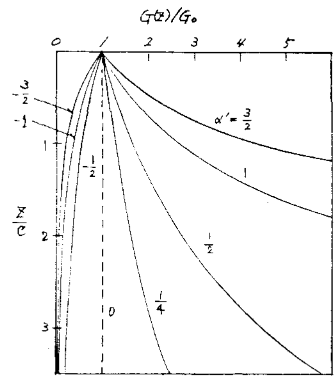

図1

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_r=\lambda e+2G(z)\frac{\partial u}{\partial r},\quad \sigma_\theta=\lambda e+2G(z)\left(\frac{u}{r}+\frac{\partial v}{r\partial\theta}\right),\quad \sigma_z=\lambda e+2G(z)\frac{\partial w}{\partial z}\\&\tau_{r\theta}=G(z)\left(\frac{\partial u}{r\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right),\quad \tau_{rz}=G(z)\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\right),\quad \tau_{\theta z}=G(z)\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{r\partial\theta}\right)\end{aligned}\right\}\quad\cdots(2)$$

(2)式をつり合い式に代入し、整理すれば変位で表わされたつり合い式*を得る。(2)(3)式において、

$$\left.\begin{aligned}&\Delta u+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial r}-\frac{1}{r}\left(2\frac{\partial v}{r\partial\theta}+\frac{u}{r}\right)+\underline{\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right)}=0\\&\Delta v+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{r\partial\theta}-\frac{1}{r}\left(\frac{v}{r}-2\frac{\partial u}{r\partial\theta}\right)+\underline{\alpha\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)}=0\\&\Delta w+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial z}+\underline{\alpha\left(\frac{2\nu e}{1-2\nu}+2\frac{\partial w}{\partial z}\right)}=0\end{aligned}\right\}\cdots(3)$$

$$\left.\begin{aligned}&\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial}{r\partial r}+\frac{\partial^2}{r^2\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\\&e=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru)+\frac{\partial v}{r\partial\theta}+\frac{\partial w}{\partial z},\\&\lambda=\frac{2\nu}{1-2\nu}\cdot G(z),\quad \nu=\text{Poisson比}\end{aligned}\right\}\cdots(4)$$

(3)式で 〰〰 を付した部分が非均質の影響項である。ここで3つの変位関数 ϕ, Φ, ψ によって、

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{\partial\psi}{r\partial\theta},\quad v=\frac{\partial\phi}{r\partial\theta}-\frac{\partial\psi}{\partial r},\quad w=\Phi\quad\cdots\cdots(5)$$

と表わし，(5)式を(3)式へ代入すれば，ψ と ϕ が満足せねばならない次の2式を得る。

$$\Delta\psi+\alpha\frac{\partial\psi}{\partial z}=0\quad\cdots\cdots(6)\qquad \Delta\Delta\phi-\beta\Delta\phi+\gamma\frac{\partial}{\partial z}\Delta\phi+\delta\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0\quad\cdots\cdots(7)$$

ここで　$\beta=\alpha^2\nu/(1-\nu)$，$\gamma=2\alpha$，$\delta=\alpha^2/(1-\nu)$

また、ϕ と Φ とは次の関係で結ばれている。

$$(1-t)\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\alpha t\Phi+\Delta\phi-(1-t)\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\alpha t\frac{\partial\phi}{\partial z}=0\quad\cdots\cdots(8)\qquad ここで\quad t=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

(6)～(8)式で $\alpha=0$ とすれば，等方均質体の場合の変位関数と一致することがわかる。

(6)(7)の解は容易に求まり，更に(8)からΦも求められるが$r, z \to \infty$で応力，変位の消失の条件を考えれば，

$$\left.\begin{aligned} &\psi=\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\theta\int_0^\infty \Psi_n(z)J_n(kr)dk\ ,\ \phi=\sum_{n=0}^{\infty}\cos n\theta\int_0^\infty \varphi_n(z)J_n(kr)dk\ ,\ \Phi=\sum_{n=0}^{\infty}\cos n\theta\int_0^\infty \Omega_n(z)J_n(kr)dk \\ &\text{ここで}\ \Psi_n(z)=F_0e^{-\zeta z},\ \varphi_n(z)=e^{-pz}(F_1\sin qz+F_2\cos qz),\ \Omega_n(z)=e^{-pz}(H_1\sin qz+H_2\cos qz)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(9)$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{ただし，}\ F_0,\ F_1,\ F_2 = \text{定数},\ \zeta=\tfrac{1}{2}(-\alpha+\sqrt{\alpha^2+4k^2}),\ p=\tfrac{1}{2}\alpha+p^*,\ \sqrt{2}\,p^*=(\sqrt{A^2+B^2}+A)^{\frac{1}{2}},\ \sqrt{2}\,q=(\sqrt{A^2+B^2}-A)^{\frac{1}{2}} \\ &A=k^2+\tfrac{1}{2}\alpha^2,\ B^2=k^2\alpha^2\nu/(1-\nu),\ H_1=-[(p_1-p)I_1+qI_2]/(1-t)\cdot R,\ H_2=-[(p_1-p)I_2-qI_1]/(1-t)\cdot R \\ &I_1=F_1\lambda_2-F_2\lambda_1,\ I_2=F_1\lambda_1+F_2\lambda_2,\ p_1=\alpha t/(1-t),\ \lambda_1=q(\alpha-2p)t,\ \lambda_2=(p^2-q^2-\alpha p)t-k^2, \\ &R=(p_1-p)^2+q^2\end{aligned}\right\}(10)$$

これらを(5)，(2)へ代入すれば，変位，応力がΨ_n，φ_n，Ω_nで表わされる。

[3] 剛体の押し込み問題　図-2の滑底剛円柱（底面形状任意）の押し込み問題を考える。本例はねじりのない場合でψは不要である。半無限体表面の境界条件は，

$$z=0,\quad 0\le r\le a,\quad w=w(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}w_n(r)\cos n\theta\ \cdots\cdots(11)$$

$$r>a,\quad \sigma_z=0\ \cdots\cdots(12),\qquad 0\le r\le\infty,\quad \tau_{rz}=\tau_{z\theta}=0\ \cdots\cdots(13)$$

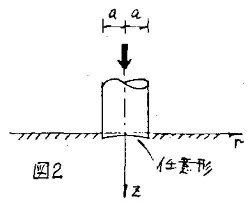

図2

条件(13)より

$$\left.\begin{aligned} &F_2=F_1[q(1-t)R-\lambda_3]/[p(1-t)R+\lambda_4], \\ &\lambda_3=\lambda_1(p_1-p)-\lambda_2 q,\ \lambda_4=\lambda_2(p_1-p)+\lambda_1 q\end{aligned}\right\}(14)$$

が得られて，これと条件(11)，(12)によって次のdual積分方程式を得る。

$$\int_0^\infty F_1Q_1(k)J_n(kr)dk=W_n(r)\quad(0\le r\le a),\quad \int_0^\infty F_1Q_2(k)J_n(kr)dk=0\quad(r>a)\ \cdots\cdots(15)$$

ここで

$$Q_1=-\frac{\lambda_3p+\lambda_4q}{p(1-t)R+\lambda_4},\quad Q_2=\frac{[-k^2\chi\{q(1-t)R-\lambda_3\}+(1+\chi)\{\lambda_3(p^2+q^2)-q(\lambda_1^2+\lambda_2^2)/(1-t)\}]}{p(1-t)R+\lambda_4},\quad \chi=\frac{\nu}{1-2\nu}$$

さて(15)は無次元量$\rho=r/a$及び$s=ka$を導入して次のように変形される。

$$\int_0^\infty g(s)f(s)J_n(\rho s)ds=W_n(\rho)\quad(0\le\rho\le 1),\quad \int_0^\infty f(s)J_n(\rho s)ds=0\quad(\rho>1)\ \cdots\cdots(16)$$

ただし，$f(s)$は$a^3F_1Q_2$，$g(s)$はQ_1/Q_2を(s)によって書きかえたものである。(16)のdual積分方程式を解くために，iを任意の正の定数$(i>0)$として，$f(s)$を次式で仮定すると(16-2)式は満たされる事がわかる。

$$f(s)=s^{1-i}\sum_{m=0}^{\infty}a_mJ_{n+2m+i}(s)\ \cdots\cdots(17)$$

ただし，a_mは未定定数である。(17)式を(16-1)式へ代入し更に公式(18)を利用して変形すれば(19)式が得られる。

$$s^{-i}J_{n+2m+i}(s)=\frac{\Gamma(n+m+1)}{2^{i-1}\Gamma(n+1)\Gamma(m+i)}\int_0^1\rho^{n+1}(1-\rho^2)^{i-1}\mathcal{F}_m(i+n,n+1,\rho^2)J_n(s\rho)d\rho\ \cdots\cdots(18)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_mL_{m\ell}=E(n,\ell,i)\ \cdots\cdots(19)\qquad \text{ただし}\quad L_{m\ell}=\int_0^\infty g(s)s^{1-2i}J_{n+2m+i}(s)J_{n+2\ell+i}(s)ds\ \cdots\cdots(20)$$

ここで$\mathcal{F}_m$はJacobiの多項式，ΓはGamma関数，$\ell=0,1,2,\cdots$でEは次式で与えられる。

$$E(n,\ell,i)=\frac{\Gamma(n+\ell+1)}{2^{i-1}\Gamma(n+1)\Gamma(\ell+i)}\int_0^1W_n(\rho)\rho^{n+1}(1-\rho^2)^{i-1}\mathcal{F}_\ell(i+n,n+1,\rho^2)d\rho\ \cdots(21)$$

もしも$W_n(\rho)=\overline{W}\cdot\rho^n$（$W$:定数）ならば　$E(n,\ell,i)=0\ (\ell\ne 0)$，$2^{-i}\Gamma(n+1)\overline{W}/\Gamma(i+n+1)\ (\ell=0)$と簡単化される。(16)のdual積分方程式は(19)式の無限連立方程式を解くことに帰着されたが，(20)の無限積分値がうまく収束するようiの値を選ぶ必要がある。

[4] 参考文献

(1) Fourier Transforms. McGraw Hill (2) 機械論文集，21巻11号 (3) 土木31回全国大会 I-15 (4) 土木会誌，17巻11号 (5) P.M.M. Vol.25. No.6 (6) ASCE. Vol.98. EM2 (7) Q.J.Mech.Appl.Math. Vol.7, p318 (8) 岩波数学公式 III など