

I-13 半無限多層弾性体 Boussinesq 問題

信州大学 正夏 ○石川 清志
同 同 谷本 勉之助
同 同 夏目 正太郎

半無限弾性体系の境界値問題は古くからの弾性学問題であって数多くの人々により解かれている。多くの研究は二次元弾性の重調和方程式を中心とした Airy 応力関数による普通代数的手法で解析が行われている。とくに、多層弾性体系となると大型連立方程式となり、弾性学においても難解な問題とされている。近年において、この大型連立方程式を排除した Transfer matrix の漸化式の方法による半無限多層二次元弾性の境界値問題がある。ここでは、弾性体系の基礎方程式は、応力方程式および応力とひずみ関係の Hooke 法則から、変位ベクトル U による連立偏微分方程式となる。すなわち、変位方程式である。

$$\nabla U = 0.$$

1). 二次元弾性の場合

$$\nabla = \begin{bmatrix} 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial y^2}, & (1+\nu)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \\ (1+\nu)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}, & (1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

2). 3次元弾性の場合

$$\nabla = \begin{bmatrix} (1-2\nu)\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}, & \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}, & \frac{\partial^2}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}, & (1-2\nu)\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, & \frac{\partial^2}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial z}, & \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}, & (1-2\nu)\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}.$$

これより一般解である基礎方程式を満たす変位関数を求め、資料のテータ完全分類の固有マトリクス法による、より整理した漸化式で解くものである。Transfer matrix は 未定物理量を基準とした物理漸化式であるのに対して、固有マトリクスは微分方程式の一般解の未定積分常数を基準とした代数漸化式であるといえる。

以下に、3層の二次元弾性の場合についての数値計算結果を示す。

$$P_x = 5.0t/m$$

$$P_y = 10.0t/m$$

Table 1. Convergence in Fourier Integrals for Boundary Conditions.

 (1st-layer) $E=1.5 \cdot 10^8 \text{ t/m}^2$ $\nu=0.38$ (2nd-layer) $E=2.5 \cdot 10^8 \text{ t/m}^2$ $\nu=0.33$ (3rd-layer) $E=6.0 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$ $\nu=0.27$	Abscissa		External loading conditions (t/m)		Internal stresses(t/m^2) along top surface ($y=0.0$)								
	x	P_x	P_y	$\alpha = 6.0$						$\alpha = 10.0$		$\alpha = 14.0$	
				τ_{xy}	σ_y	τ_{xy}	σ_y	τ_{xy}	σ_y	τ_{xy}	σ_y		
y (m)	0.0	-5.0	-10.0	-4.5349	-9.0698	-5.2787	-10.5574	-4.9536	-9.9071				
	0.2	-5.0	-10.0	-4.8782	-9.7564	-4.9006	-9.8013	-5.0317	-10.0635				
	0.4	-5.0	-10.0	-5.4777	-10.9554	-4.7442	-9.4885	-5.0161	-10.0322				
	0.6	-5.0	-10.0	-5.4521	-10.9042	-5.3946	-10.7891	-4.8845	-9.7691				
	0.8	-5.0	-10.0	-4.3045	-8.6090	-5.0007	-10.0013	-5.3529	-10.7058				
	0.9	-5.0	-10.0	-3.3927	-6.7853	-3.9227	-7.8454	-4.4909	-8.9819				
	1.0	-5.0	-10.0	-2.3952	-4.7904	-2.4641	-4.9282	-2.5540	-5.1080				
	1.1	0.0	0.0	-1.4389	-2.8777	-1.0326	-2.0652	-0.5255	-1.0511				
	1.2	0.0	0.0	-0.6351	-1.2702	-0.0170	-0.0340	0.4570	0.9140				
	1.4	0.0	0.0	0.2679	0.5359	0.3238	0.6476	-0.2077	-0.4154				
	1.6	0.0	0.0	0.2998	0.5995	-0.1912	-0.3825	0.0886	0.1771				
	1.8	0.0	0.0	-0.0177	0.0355	-0.0486	0.0973	-0.0127	-0.0253				
	2.0	0.0	0.0	0.1781	-0.3562	0.1458	0.2915	-0.0392	-0.0784				
	2.2	0.0	0.0	-0.0734	-0.1468	-0.0625	-0.1250	0.0731	0.1462				
	2.4	0.0	0.0	0.0834	0.1667	-0.0621	-0.1243	-0.0919	-0.1838				

Note: α = Upper limit of mechanical quadrature τ = Shearing stress σ = Normal stress

Note; α = Upper limit of mechanical quadrature, τ_{xy} = Shearing stress, σ_y = Normal stress.

固有マトリクス法のテータ完全分類、すなわち、x-座標項、未定常数項、および y-座標項を行ベクトル、列ベクトルで表わす整理したマトリクス代数で扱うと、3次元弾性の場合も全く同じ方法で解析できることになる。