I-12　混合境界値問題の一解法

名古屋工業大学　正員　長谷部宣男

<u>まえがき</u>　2次元弾性問題は，境界条件の与え方により境界上で（1）外力のみが指定される場合（2）変位のみが指定される場合（3）外力が指定される部分と変位が指定される部分がある混合型の場合の三つに大きく分けられる。この内（1）と（2）は，数学的には同じである。しかし混合型の（3）の場合は，（1）（2）より数学的にははるかに難しい。Muskhelishvili［1］は，混合型の問題をRiemann-Hilbertの問題に直して解けることを示している。また単位円への写像関数が有理写像関数である場合には，解が閉じた形で得られることを示している。しかし文献［1］に示されている解法は，複素応力関数の1次導関数を用いて解析されているため，基礎方程式が複雑であり，変位を求めるためにはこれらの関数を積分しなければならず一般にはそれが難しい。ここでは文献［2］に示されたShermanによる解法を用い，例として境界上の一部が固定された半無限板が一様引張りを受ける問題を，単位円に写像する写像関数を用いて解く。この問題を解くのに単位円への写像関数を用いて解くことは，この場合には必ずしも有利ではない。しかし任意の形状の問題を解くには単位円への有理写像関数を用いなければならない。そこで最も簡単な例として半平面を単位円へ等角写像する写像関数を用いて解析することにする。この問題は，写像関数を用いずに少々天下り的に応力関数を仮定することによって解が得られている［3］。

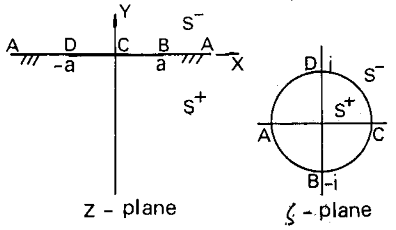

図-1　半平面と単位円

<u>解法</u>　以下必要な基本式を示す。

写像関数 $z=\omega(\zeta)$，複素応力関数 $\phi(\zeta)$，$\psi(\zeta)$ とすると境界条件式は，単位円周上 $\sigma=e^{i\theta}$ で

$$\kappa\phi(\sigma)-\delta(\sigma)\phi(\sigma)-\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\phi'(\sigma)}-\overline{\psi(\sigma)}=f(\sigma)+C(\sigma) \qquad (1)$$

となる。$\delta(\sigma)=\begin{cases}0\\ \kappa+1\end{cases}$，$f(\sigma)=\begin{cases}2G(u+iv) & （変位境界上で）\\ -i\int(p_x+ip_y)ds & （外力　〃　）\end{cases}$

$\kappa=3-4\nu$（平面ひずみ），$\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$（平面応力）　ν：ポアソン比，G：せん断弾性係数，

$C(\sigma)$は，外力の与えられる各部分で決められる定数である。

以下図-1に示す半無限領域を単位円内部に等角写像する写像関数を用いて，半無限板が一様引張りを受ける場合について説明する。単位円周上 $\widehat{BCD}$ で変位拘束 $u=v=0$，$\widehat{DAB}$ で応力自由 $p_x=p_y=0$ である。

写像関数　　$z=\omega(\zeta)=-2ai/(1+\zeta)+ai$　　(2)

求める応力関数を　$\phi(\zeta)=\phi_0(\zeta)+\phi_1(\zeta)$，　$\psi(\zeta)=\psi_0(\zeta)+\psi_1(\zeta)$　　(3)

とする。ここに $\phi_0(\zeta)$，$\psi_0(\zeta)$ は，x方向一様引張りを表わす項で $\phi_0(\zeta)=\frac{P}{4}\omega(\zeta)$，$\psi_0(\zeta)=-\frac{P}{2}\omega(\zeta)$ である。これらを境界条件式（3）に代入し，$\frac{1}{2\pi i}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$ を乗じて単位円周上で積分すると，$\phi_1(\zeta)$ について

$$\kappa\phi_1(\zeta)-\frac{\kappa+1}{2\pi i}\int_i^{-i}\frac{\phi_1(\sigma)}{\sigma-\zeta}d\sigma=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f_1(\sigma)}{\sigma-\zeta}d\sigma+\frac{B}{1+\zeta}+A \qquad (4)$$

を得る。$B/(1+\zeta)$ の項は関数 $\phi_1(\zeta)$ が，$\zeta=-1$ で特異点を有するためにでて来た項で $\zeta\to-1$ のとき応力が一様引張り P になる条件より決められる。定数 A は $\zeta=-i$ で $\phi_1(\zeta)$ が連続になる（変位は連続だから）条件より決められる．式（1）の $C(\sigma)$ の項は，今の例では，外力の指定された部分が一ヵ所で，外力は釣り合っている（$p_x=p_y=0$ である）ので 0 とおける。$f_1(\sigma)$ は式（3）を式（1）に代入したとき $\phi_0(\zeta)$，$\psi_0(\zeta)$ から出て来る項である．式（4）の右辺を $N(\zeta)/2$ とおくと，また $m=\frac{1}{2}+\frac{i}{2\pi}\log\kappa$ とおくと，式（4）より $\phi_1(\zeta)$ として次式を得る［2］。

$$\phi_1(\zeta) = \frac{1}{2\kappa}N(\zeta) - \frac{\kappa+1}{4\pi i\kappa}\left(\frac{\zeta-i}{\zeta+i}\right)^m \int_i^{-i}\left(\frac{\sigma+i}{\sigma-i}\right)^m \frac{N(\sigma)}{\sigma-\zeta}\,d\sigma \qquad (5)$$

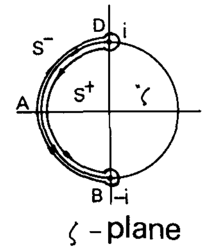

図-2 周回積分

上式の右辺の積分がこの問題を解く上で一番めんどうな問題である。これは被積分関数が多価関数であることによる。式(5)の右辺の積分を行なうためには，たとえば $\frac{1}{2\pi i}\int_i^{-i}\left(\frac{\sigma+i}{\sigma-i}\right)^m\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$ という積分を行なう必要がある。このために図-2に示す弧 $\overset{\frown}{DAB}$ に分岐線を考えこの分岐線を含む図-2のような閉曲線を考える。すると閉曲線について次式の積分を得る。

$$\frac{1}{2\pi i}\int_i^{-i}\left[\left(\frac{\sigma+i}{\sigma-i}\right)^m\right]^+\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-i}^{i}\left[\left(\frac{\sigma+i}{\sigma-i}\right)^m\right]^-\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\oint\left(\frac{\sigma+i}{\sigma-i}\right)^m\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} \quad ---(6)$$

上式中[ ]$^+$と[ ]$^-$は分岐線をはさんで領域S^+とS^-における[ ]内の値を表わし，分岐点を一周する偏角の差より $\left[\left(\frac{\sigma+i}{\sigma-i}\right)^m\right]^+ = \left[\left(\frac{\sigma+i}{\sigma-i}\right)^m\right]^- e^{2\pi i m}$ である。また式(6)の右辺の積分は，無限遠点の留数をも考えて，留数定理より $\left(\frac{\zeta+i}{\zeta-i}\right)^m - 1$ である。したがって

$$\frac{1}{2\pi i}\int_i^{-i}\left(\frac{\sigma+i}{\sigma-i}\right)^m\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = \frac{1}{1+\kappa}\left[\left(\frac{\zeta+i}{\zeta-i}\right)^m-1\right]$$ を得る。

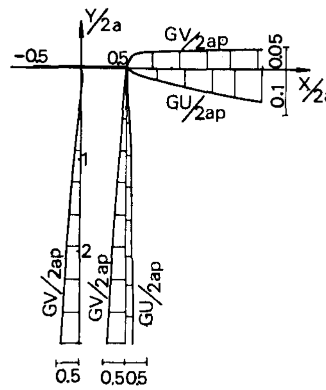

図-3 変位

式(5)には上式と類似の積分項が他に3項あり，上式よりは少々めんどうであるが同様にして得られる。これらの結果を用いて式(5)を計算し，式(3)に代入すると，最終的に求めたい複素応力関数は

$$\phi(\zeta) = \frac{\sqrt{2}Pai\kappa^{\frac{1}{2}}}{4}\frac{1}{1+\zeta}(\zeta-i)^m(\zeta+i)^{1-m} \qquad (7)$$

として得られる。式(2)を用いて変数zに書き直すと式(7)は

$$\phi(\zeta) \equiv \varphi(z) = \frac{P}{4}(z+a)^m(z-a)^{1-m}$$

となり，これは文献[3]の結果に一致する。

$\phi(\zeta)$が求まれば，$\psi(\zeta)$は$\phi(\zeta)$を式(1)に代入し，式(1)の共役な式を作って，両辺に $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$ を乗じ，コーシー積分を用いて求めればよい。しかしその積分は，$\phi(\zeta)$の誘導からもわかったようにはなはだめんどうである。この問題では，変位境界または自由境界で解析接続を行なって求めた方が楽である[4]。

自由境界より解析接続によって$\psi(\zeta)$として次式が得られる。

$$\psi(\zeta) = -\bar{\phi}(1/\zeta) - \frac{\overline{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)}\phi'(\zeta)$$

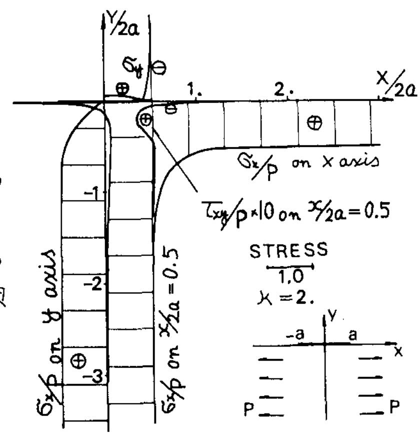

図-4 応力分布

ここに $\bar{\phi}(1/\zeta) = \frac{\sqrt{2}Pai\kappa^{-\frac{1}{2}}}{4}\frac{1}{1+\zeta}(\zeta-i)^{1-m}(\zeta+i)^m$ である。写像関数式(2)を用いてzで表わすと

$\psi(z) = -\overline{\varphi}(z) - z\varphi'(z)$ となり，文献[3]の結果と一致する。

得られた$\varphi(z)$，$\psi(z)$を用いて，いくつかの断面の変位及び応力を求めると図-3，図-4となる。計算例では$\kappa=2$としている。

[1] N.I. Muskhelishvili, "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity"
[2] S.G. Mikhlin, "Integral Equations" Pergamon Press 1964
[3] 王手，鎌田，"境界の一部を固定された半無限板の単純引張り" 日本機械学会論文集 29巻 206号 昭38
[4] A.H. England "Complex Variable Method in Elasticity" Wiley-Interscience