I-10　　積分方程式による熱応力解析

京都大学大学院　学生員　原　利弘
京都大学工学部　正　員　丹羽義次
京都大学工学部　正　員　福井卓雄

1. はじめに

本報は熱弾性問題を、初期値、境界値問題として積分方程式に定式化し、解法の問題点を考察するとともに、解析手法に検討を加え、数値解析を試みようとしたものである。一般的な熱弾性問題は、エネルギー方程式より導き出される連成熱伝導式と、運動方程式より得られるNavier式の二つの連立偏微分方程式を構成する。これらは連成熱弾性問題と呼ばれ一般に難解である。したがってここでは積分方程式を構成するに当り、ひずみ速度による連成項と慣性項を無視することにより、互いに独立な非連成準静的熱伝導問題として定式化する。

2. 基礎方程式と境界条件

非連成準静的熱弾性理論の基礎方程式は、等方材料を仮定した場合、境界値問題として次の独立な二つの式で表わせる。(Fig-1参照)

(1) 非定常熱伝導方程式　　$\theta(x,t)$：初期状態からの温度変化　　$Q(x,t)$：発熱項

$$\mathbb{K}[\theta(x,t)] = a^2\nabla_x^2\theta(x,t) - \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t} = -Q(x,t) \qquad x\in D \qquad ①$$

$$\begin{cases} \theta(x,t) = \varphi(x,t) & & x\in\partial D \\ \dfrac{\partial\theta(x,t)}{\partial n} = \psi(x,t) & \text{（境界条件）} & x\in\partial D \\ \theta(x,0) = \theta_0(x) & \text{（初期条件）} & x\in D \end{cases}$$

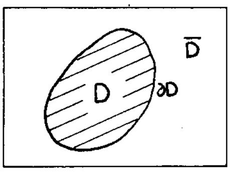

Fig-1.

(2) Navier方程式　　$u_i(x)$：変位　　$t_i(x)$：表面力　　$\tau_{ij}(x)$：応力　　$X_i(x)$：物体力

$$\mathbb{L}^x_{ij}u_j + X_i - \beta\theta_{,i} = \mu\left(u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu}u_{j,ji}\right) + X_i - \beta\theta_{,i} = 0 \qquad x\in D \qquad ②$$

$$\begin{cases} u_i(x) = f_i(x) & \text{（境界条件）} & x\in\partial D \\ t_i(x) = g_i(x) & & x\in\partial D \end{cases}$$

ここで

$$t_i = \tau_{ij}n_j = \mathbb{T}^x_{ij}u_j - \beta\theta n_i = \mu\left\{\frac{2\nu}{1-2\nu}u_{k,k}n_i + n_j(u_{i,j}+u_{j,i})\right\} - \beta\theta n_i \qquad x\in\partial D \qquad ③$$

$$\tau_{ij} = \mathbb{S}_{ijk}u_k - \beta\delta_{ij}\theta = \mu\left(\frac{2\nu}{1-2\nu}u_{k,k}\delta_{ij} + u_{i,j} + u_{j,i}\right) - \beta\delta_{ij}\theta \qquad x\in D \qquad ④$$

上式の解析手順は、①式によって対象とする時刻tにおける$\theta(x,t)$を求め、これより②、③式によって$u_i(x)$ $t_i(x)$を求め、さらに④式によって内部のτ_{ij}を決定すればよい。

3. 積分方程式への定式化とその問題点

(1) 非定常熱伝導方程式

①で表わされる方程式は、$\mathbb{K}$の随伴作用素を用い、弾性論の相反定理に対応するGreen公式を使えば次のような積分方程式に帰着できる。

$$F(x)\theta(x,t) = \int_0^t d\tau\int_{\partial D} a^2\left[\Pi(x,y,t-\tau)\hat{\theta}^y(y,\tau) - \hat{\Pi}^y(x,y,t-\tau)\,\theta(y,\tau)\right]dS_y$$
$$+\int_D \Pi(x,y,t-\tau)\,\theta_0(y)\,dV_y + \int_0^t d\tau\int_D \Pi(x,y,t-\tau)\,Q(y,\tau)\,dV_y \qquad ⑤$$

ここで

$$F(x) = \begin{cases} 1 & x\in D \\ \frac{1}{2} & x\in\partial D \\ 0 & x\in\bar{D} \end{cases} \qquad \hat{\theta}^y(y,\tau) = \frac{\partial\theta(y,\tau)}{\partial n_y} \qquad \hat{\Pi}^y(x,y,t-\tau) = \frac{\partial\Pi(x,y,t-\tau)}{\partial n_y}$$

$$\mathbb{K}[\Pi(x,y,t-\tau)] = -\delta(x-y)\,\delta(t-\tau) \qquad \Pi(x,y,t-\tau) = \frac{1}{\{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\}^m}\, e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} \ \text{in}\ R^{m+1} \quad r = |x-y|$$

この式は初期条件 $\Theta_0(x)\equiv 0$ と発熱項 $Q(x,t)\equiv 0$ を仮定すれば、体積積分を含まない面積積分だけの積分方程式に簡略化できる。またこの式は t について Volterra 型、x について Fredholm 型の特異積分方程式となっている。このような特異積分方程式を数値的に離散化して連立方程式として解く場合、Fredholm 型については特異核を適切に評価することにより比較的容易に解くことができる。しかし Volterra 型においては特異核の評価もさることながら、その特異性が連立方程式の定式化自体に影響するため、解析手法についての検討も必要となる。実際 Volterra 型の特異積分方程式については今まで数値解析例も数少なく、⑤式のような Volterra 型と Fredholm 型が混合された場合の例はほとんどない。このような点を考え合わせれば、t についての Laplace 変換、又は Fourier 変換を用いて Volterra 型の特異性をなくし、変換域での Fredholm 型の特異積分方程式の解を逆変換することによって、⑤式を解く方法も考えられる。しかしこの場合、数値逆変換の問題、時間に依存する境界値問題への適用性を考慮すれば、⑤式を直接に数値解析することも重要と考える。

(2) Navier 方程式

三次元における②, ③, ④式で表わされる熱弾性問題は相反作用の定理を用いれば、次のような Somigliana の積分方程式を得る。

$$F(x)u_i(x) = \int_{\partial D}\left[G_i^{(j)}(x,y)\{t_j(y)+\beta\Theta(y)n_j\} - \hat{G}_i^{(k)}(x,y)u_k(y)\right]dS_y + \int_D G_i^{(j)}(x,y)\{X_j(y) - \beta\Theta(y)_{,j}\}\,dV_y \qquad ⑥$$

ここで
$$\hat{G}_i^{(k)}(x,y) = T_{ij}^{y}\,G_j^{(k)}(x,y) \qquad\qquad \mathbb{L}_{ij}^{x}\,G_j^{(k)}(x,y) = -\delta(x-y)\,\delta_i^{(k)}$$

$$G_j^{(k)}(x,y) = \frac{1}{4\pi\mu}\left\{\frac{\delta_{ik}}{r} - \frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_k}\right\} \quad \text{：Kelvin解}$$

⑥式は②式と合わせて線形弾性理論と非連成熱弾性理論との間に成立する Duhumel - Neumann の類似の積分表示と考えることができる。したがって⑥式では $\Theta(y)$, $\Theta(y)_{,j}$ が計算されれば、線形弾性理論の解析手法をそのまま適用できる。ここではさらに⑥式を整理して次の式を得る。

$$F(x)u_i(x) = \int_{\partial D}\left[G_i^{(j)}(x,y)\,t_j(y) - \hat{G}_i^{(k)}(x,y)u_k(y)\right]dS_y + \int_D\left[G_i^{(j)}(x,y)\,X_j(y) + G_i^{(j)}(x,y)_{,j}\,\beta\Theta(y)\right]dV_y \qquad ⑦$$

この式は⑥式に比べ非常に簡素化されており、特に注目すべきこの方程式の利点は⑥式に含まれていた温度勾配の項 $\Theta(y)_{,j}$ が現われていないことであり、これによって⑤式を直接微分して温度勾配を求める乱雑さを省略できる。したがって Fredholm 型の特異積分方程式⑦を数値的に解けばよい訳であるが、ここで問題となるのは右辺第二項に表わされている体積積分の項である。一般に線形弾性体における積分方程式の解析においては、物体力 $X_i(x)$ を無視して体積積分の項を消去している。しかし熱弾性問題ではこれは上式に示すように不可能となり、体積積分の適確な評価が重要となる。概して、体積積分の必要性は求めようとする値を表面積分だけで求めることができるという積分方程式の利点を損ない、また実際に数値解析した場合、体積積分は面積積分に比べて精度が悪いという理由により、解析全体の精度が下がることが予想される。しかし領域内分割の合理化、特異核の数学的な積分評価などを適用すれば、精度の低下をある程度防げると考えられる。また、今後の積分方程式による各種の広範な境界値問題への応用と拡張を考慮した場合、体積積分を含む積分方程式の解法の試みは、その解析例も少ないことを考え合わせれば、重要な課題であると考える。

以上述べたように熱弾性問題の積分方程式による解析には二つの大きな問題点があり、Volterra 型の積分方程式については、かなりの精度で解を得ることが可能となっているが、体積積分については今後さらに検討を必要とし、解析例とその結果は当日報告する。