

[1] はじめに 本報告の目的は境界値問題の有効な解析手法である積分方程式法の中に固有値問題を設定し、任意幾何形状、とある物体に対し、任意周波数域、においてより低次元化された複素行列式演算、によって固有値を決定する一般的手法の確立を計るものであり、固有値の捉え方と弾性体内固有振動問題への適用を、数値実験により提示しようとするものである。

[2] 準備

基礎方程式 $\Delta u(x) = [C^2 \Delta + (C^2 - C_1^2) \nabla \nabla \cdot] u(x) = -b(x)$

二次元基本解 $U(x, y; \omega) = \frac{1}{4\pi} [H_0^{(1)}(k_1 r)] + \frac{1}{4\pi} \nabla \nabla \cdot [H_0^{(1)}(k_1 r) - H_0^{(1)}(k_2 r)]$

一重層ポテンシャル $(S\hat{u})(x) = \int_{\partial D} U(x, y; \omega) \hat{u}(y) dS_y$

二重層ポテンシャル $(D\hat{u})(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial n_y} U(x, y; \omega) \hat{u}(y) dS_y$

Green 第3 公式 $F(x) u(x) = \pm (S\hat{u})(x) \mp (D\hat{u})(x)$ 内部公式
外部公式

境界上の積分作用素 $U: L_2(\partial D) \rightarrow L_2(\partial D)$ $L_2(\partial D)$ 上の積分作用素

$(K\hat{u})(x) = \int_{\partial D} U(x, y; \omega) \hat{u}(y) dS_y$

$K^*: K$ の隣接積分作用素

$(K^*\hat{u})(x) = \int_{\partial D} U(x, y; \omega) \hat{u}(y) dS_y$

$x, y \in \mathbb{R}^2$; $x, y \in \partial D$; $k_1 = \sqrt{C^2 - C_1^2}$, $k_2 = \sqrt{C^2}$; Δ は Δ の複素共役

ここで積分方程式による固有値問題は右の表1のよりに構築出来る。各積分作用素の計算機特性と考慮すると、固有値問題は次の積分方程式の可解性問題に帰着される。

[3] 固有値決定積分方程式と固有値決定条件

第1種問題 $(S\hat{u})(x) = 0 \quad x \in \partial D$

第2種問題 $(\frac{1}{2}I + K^*)\hat{u}(x) = 0 \quad x \in \partial D$

第3種問題 $(S\hat{u})_{\partial D_+}(x) - (K^*\hat{u})_{\partial D_+}(x) = 0 \quad x \in \partial D_+ \quad (\Delta = \delta_{ij} \delta_{xy})$

$(S\hat{u})_{\partial D_+}(x) - (\frac{1}{2}I + K^*)\hat{u}(x) = 0 \quad x \in \partial D_+$

数値積分を適切に評価した時、上の積分方程式の行列表現は非自明解存在性に対する必ず条件は次のようになる。

$$[A(\omega)] \{y\} = \{0\}, \quad \det[A(\omega)] = 0$$

[4] 固有値問題の捉え方と複素行列式の評価

上の形式的表示から導かれる ω (角振動数) に関する基本的概念を列挙する。(i) 等方弾性体には2つの波が存在するが分散性を波を対象とする時 ω は正の実数値と仮定することが出来る。(ii) 積分作用素は未知量に関して線形であるがパラメータの関数とみた時、 ω をその内部に非線形超越的に含む。(iii) この時、非自明解存在条件は、複素超越方程式の零点を求める問題に帰着する。本数値解析の特徴は(ii)(iii)にあり、積分作用素を実パラメータ ω を持つ複素作用素値関数とみなす点にある。この点が境界上の積分方程式により固有値問題を捉えたことの帰結である。次に数値計算における複素行列式の捉え方を説明する。 $D: \det[A(\omega)] = 0$ に対応するパラメータの値として原理的には固有値は求まるが、問題は「数値計算上これが如何に達成されるか」にあり数値による状況を確認しておくことが必要である。いま複素行列式の挙動を感知するに最も原始的かつ有効な方法は、実パラメータ ω を連続的に与えた時、その値 D が複素平面上に描く曲線を追跡することである。いま $\det[A(\omega)]$ は $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$ なる変換器であり、本手法の精度はこの変換器の精度(即ち数値積分の精度、分割数、境界形状など)

[表1] 固有値決定方程式 (四次)					
境界 ∂D 上の同次積分方程式 $\times$ 固有関数表現					
問題	構成	積分方程式	作用素行列	固有関数	数量
I. F.	$\hat{L}$	$(\frac{1}{2}I - K^*)\hat{u} = 0$	K^*	$A_1 A_2$	$u = D \hat{u}$
	$\hat{L}$	$(\frac{1}{2}I - K^*)\hat{u} = 0$	K^*	$A_2 A_1$	$u = D \hat{u}$
	$\hat{G}$	$(\frac{1}{2}I - K)\hat{u} = 0$	K	$A_1 A_2$	$u = S \hat{u}$
	$\hat{G}$	$S \hat{u} = 0$	(S)		$u = S \hat{u}$
E. S.	$\hat{L}$	$(\frac{1}{2}I - K^*)\hat{u} = 0$	K^*	$A_1 A_2$	$u = S \hat{u}$
	$\hat{L}$	$(\frac{1}{2}I - K^*)\hat{u} = 0$	K^*	$A_2 A_1$	$u = S \hat{u}$
	$\hat{G}$	$(\frac{1}{2}I - K^*)\hat{u} = 0$	K^*	$A_1 A_2$	$u = S \hat{u}$
	$\hat{G}$	$D_n \hat{u} = 0$	(D_n)		$u = S \hat{u}$
I. S.	$\hat{L}$	$(\frac{1}{2}I + K)\hat{u} = 0$	K	$A_1 A_2$	$u = S \hat{u}$
	$\hat{L}$	$(\frac{1}{2}I + K)\hat{u} = 0$	K	$A_2 A_1$	$u = S \hat{u}$
	$\hat{G}$	$(\frac{1}{2}I + K^*)\hat{u} = 0$	K^*	$A_1 A_2$	$u = -D \hat{u}$
	$\hat{G}$	$D_n \hat{u} = 0$	(D_n)		$u = -D \hat{u}$
E. F.	$\hat{L}$	$(\frac{1}{2}I + K^*)\hat{u} = 0$	K^*	$A_1 A_2$	$u = D \hat{u}$
	$\hat{L}$	$(\frac{1}{2}I + K^*)\hat{u} = 0$	K^*	$A_2 A_1$	$u = D \hat{u}$
	$\hat{G}$	$(\frac{1}{2}I + K)\hat{u} = 0$	K	$A_1 A_2$	$u = D \hat{u}$
	$\hat{G}$	$S \hat{u} = 0$	(S)		$u = D \hat{u}$
I. M.	$\hat{G}$	$(S\hat{u})_{\partial D_+}(K^*\hat{u})_{\partial D_+} = 0$	S	$x \in \partial D_+$	$u = (S\hat{u})_{\partial D_+}$
	$\hat{G}$	$(S\hat{u})_{\partial D_+}(\frac{1}{2}I + K^*)\hat{u} = 0$	K^*	$x \in \partial D_+$	$u = -(D\hat{u})_{\partial D_+}$
	$\hat{G}$	$(S\hat{u})_{\partial D_+}(\frac{1}{2}I + K^*)\hat{u} = 0$	K^*	$x \in \partial D_+$	$u = -(D\hat{u})_{\partial D_+}$
	$\hat{G}$	$(S\hat{u})_{\partial D_+}(\frac{1}{2}I + K^*)\hat{u} = 0$	K^*	$x \in \partial D_+$	$u = -(D\hat{u})_{\partial D_+}$
E. M.	$\hat{G}$	$(S\hat{u})_{\partial D_+}(K^*\hat{u})_{\partial D_+} = 0$	S	$x \in \partial D_+$	$u = (S\hat{u})_{\partial D_+}$
	$\hat{G}$	$(S\hat{u})_{\partial D_+}(\frac{1}{2}I + K^*)\hat{u} = 0$	K^*	$x \in \partial D_+$	$u = -(D\hat{u})_{\partial D_+}$
	$\hat{G}$	$(S\hat{u})_{\partial D_+}(\frac{1}{2}I + K^*)\hat{u} = 0$	K^*	$x \in \partial D_+$	$u = -(D\hat{u})_{\partial D_+}$
	$\hat{G}$	$(S\hat{u})_{\partial D_+}(\frac{1}{2}I + K^*)\hat{u} = 0$	K^*	$x \in \partial D_+$	$u = -(D\hat{u})_{\partial D_+}$

[表1の注] I: 内部, E: 外部, F: 第1種, S: 第2種, M: 第3種

に左右され、数値計算上の零値が達成されることは不可能であろう。図-1はこの状況を説明したもので、複素平面の原点からの距離 $|D|$ が各パラメータ ω に対する行列式の大きさを与えている。この数値計算段階において一般的には、固有値問題を複素平面上の極値問題として捉えることが自然である。この推論の保証を得るために行なった数値実験が図-2である。これは図中に表示した形状に対する Helmholtz 方程式 Dirichlet 固有値問題に対して実行された。図の下部には正解(Bessel関数の零点)を示した。○印は各境界分割数 N に対する $|D|$ の極値を示した。○印に対応するパラメータ K が近似固有値 K_{00} であり、相当荒い分割(境界分割 N とバタタの分割 $4K$ を意味し、今の場合 $4K=0.1$)にもかかわらず、各 K_{00} は正解と十分近接し得ることが確認される。積分がより正確に評価されるに従い(N が増加するにつれ)行列式の値が零に近づく方向に固有値が決定される状況を示している。「この極値近傍でさらに細分割を行えばさらに正確な近似固有値を得ることが出来る」。この主張は数値的に検討したものが表-2にある。境界分割数 N が多い程精度がよくなるのは当然である。問題は $N=16$ なる荒い分割数にもかかわらず各固有値近傍において2%以内の相対誤差以内に収まっている事実にある。さらに、本解析手法が本質的に関係するのは積分の精度であり積分が正確に評価される時、境界分割数 N によらず高次固有値をも正確に求めることが出来る。これは基礎偏微分方程式の基本解を用いることの直接的帰結であり、他の手法には見られない特徴の一つである。

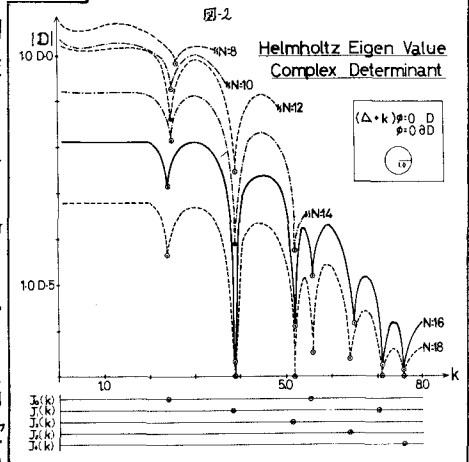
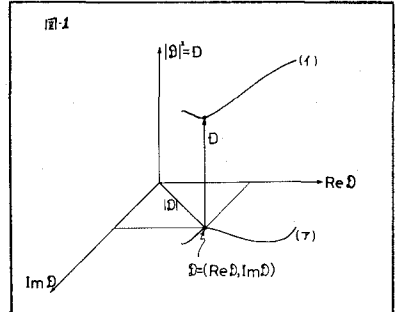


表-2 First and Second Eigen Value

N	Exact $K_1=2.40483$		Exact $K_2=3.83171$	
	Numerical K_1	Error $e= K_1-K_1 $	Numerical K_2	Error $e= K_2-K_2 $
16	2.447	0.042	1.75	0.085
20	2.432	0.027	1.12	0.041
30	2.417	0.012	0.50	0.019
40	2.412	0.007	0.29	0.010
50	2.408	0.008	0.17	0.007

[5] 弾性問題への応用 本手法は第1種(波値)、第2種(応力)、第3種(混合)境界値問題に適用された。図-3、図-4に第3種問題、第1、第2固有値決定段階を示した。ここにおいて $N=16$ なる荒い分割数にもかかわらず行列式の極値を与え、積波波数は、ほぼ一定した値を保持していることが確かめられる。紙面の都合上他の問題に対する結果は当日報告するが、ほぼ同じ傾向を示していることを付記する。

[6] おわりに
本手法の最も重要な段階は図-2の作成である。言い換えるならば、なるべく少ない分割数で、ある程度の正確性を保持し、任意周波数域に対し極値の位置を指定する段階にある。この段階における主観性が問題となるが、この点は数値積分の精度が保証される時、解消される。最後に、表-1における基本的段階の考察は、内部、外部問題と固有値の関係、さらには、局所固有値の存在性など、多くの問題を提示することを行記する。

