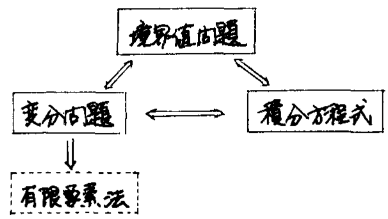
I-8 積分方程式法と有限要素法との融合解析法について

京都大学工学部 正員 ○福井卓雄 丹羽義次

本報文は積分方程式法と有限要素法との融合解析法の一つの定式化としてハイブリッド型変分原理を用いる方法を提案するものである。積分方程式法を用いて有限要素法における super element を構成して解析に用いようという試みは，すでに(1),(2) においてなされているが，これらは次の二つの目的のためである。第一に，従来の積分方程式のままでは定式化が困難な不均質領域[2]や非線形領域を比較的簡便な方法で取り扱うこと。第二に，積分方程式法では零要素のない密なマトリクスを扱うことになるが，領域を適当に分割することによって，零要素を多く含んだマトリクスを作って数値的な取り扱いを容易にすることである。第二の意味では，Jachat と Watson[3]，岡村等[4] の研究もある。積分方程式はそれと等価な変分問題に帰着することができる[3]，即ち，境界値問題，変分問題，積分方程式は等価なものである。ここでは，領域の一部を積分方程式で，残りの部分を有限要素法で解析するための変分問題を導く。



例として，二階線形楕円型偏微分方程式の境界値問題について考えよう。弾性論についてもまったく同様である。まず，境界値問題は，

$$\mathbb{L}u \equiv a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = -\bar{f} \quad \text{in } D.$$
$$u = \bar{u} \quad \text{on } \partial D_1, \qquad \mathbb{N}u \equiv n_i \cdot a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} = \bar{t} \quad \text{on } \partial D_2 = \partial D - \partial D_1. \quad (n_i: \text{外向き単位法線ベクトル}). \qquad (1)$$

<u>積分方程式と対応する変分問題</u>　基本特異解 $G(x:y)$ を $\mathbb{L}^{*}G(x:y) = -\delta(x-y)$ によって決めれば，境界上の u，$\mathbb{N}u$ によって内部の u は次のように表わされる。

$$u(x) = \int_{\partial D}\{G(x:y)\mathbb{N}^y u(y) - \mathbb{N}^y G(x:y)u(y)\}\,dS_y. \qquad x \in D. \qquad (2)$$

x の境界への極限を取ると，u，$\mathbb{N}u$ の境界上の値は次の様に書ける。

$$u(\bar{x}) = \int_{\partial D} G(\bar{x}:y)\mathbb{N}^y u(y)\,dS_y + \frac{1}{2}u(\bar{x}) - \int_{\partial D}\mathbb{N}^y G(\bar{x}:y)u(y)\,dS_y, \qquad \bar{x} \in \partial D \qquad (3)$$
$$\mathbb{N}^{\bar{x}}u(\bar{x}) = \frac{1}{2}\mathbb{N}^{\bar{x}}u(\bar{x}) + \int_{\partial D}\mathbb{N}^{\bar{x}}G(\bar{x}:y)\mathbb{N}^y u(y)\,dS_y - \int_{\partial D}\mathbb{N}^{\bar{x}}\mathbb{N}^y G(\bar{x}:y)u(y)\,dS_y, \quad \bar{x} \in \partial D$$

積分方程式は，境界上の関数 (v, t) を $(u, \mathbb{N}u)$ に対応させて考えて，内部の u を式(2)で仮定する。このとき u は内部で式(1)$_1$を満足しており，u が境界上で $u = v$ となるための条件(3)$_1$ から導かれる。このとき $\mathbb{N}u$ は式(3)$_2$ の右辺により与えられ $\mathbb{N}u = t$ となっている。この問題に対応する汎関数は次のようになる。

$$\begin{aligned}\Pi_I(v, t) = {}& \frac{1}{2}\int_{\partial D} t(x)v(x)\,dS_x + \iint_{\partial D}\mathbb{N}^y G(x:y)t(x)v(y)\,dS_x dS_y \\ & - \frac{1}{2}\iint_{\partial D} G(x:y)t(x)t(y)\,dS_x dS_y - \frac{1}{2}\iint_{\partial D}\mathbb{N}^x\mathbb{N}^y G(x:y)v(x)v(y)\,dS_x dS_y \\ & - \int_{\partial D_2}\bar{t}(x)v(x)\,dS_x\end{aligned} \qquad (4)$$

実際に，付帯条件 $v = \bar{u}$ on ∂D_1 のもとに，この式の第一変分を取れば

$$\begin{aligned}\delta\Pi_I = {}& \int_{\partial D}\{\frac{1}{2}v(x) + \int_{\partial D}\mathbb{N}^y G(x;y)v(y)\,dS_y - \int_{\partial D}G(x,y)t(y)\,dS_y\}\,\delta t(x)\,dS_x \\ & + \int_{\partial D_2}\{[\frac{1}{2}t(x) + \int_{\partial D}\mathbb{N}^x G(x,y)t(y)\,dS_y - \int_{\partial D}\mathbb{N}^x\mathbb{N}^y G(x,y)v(y)\,dS_y] - \bar{t}(x)\}\,\delta v(x)\,dS_x = 0\end{aligned} \qquad (5)$$

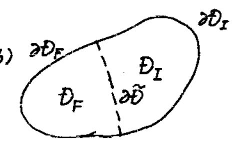
すなわち，式(2)により，(v, t) で与えられた u は，境界での連続条件(3)$_1$を満足し（第一項），かつ，境界 ∂D_2 上での境界条件 $\mathbb{N}u = \bar{t}$ を満足する（第二項）。

式(4)の汎関数 $\Pi_I(v, t)$ は，積分方程式(3)$_1$に対応するものとしては唯一のものではないかもしれないが，この後の展開では十分に役立つものである。

<u>融合解析のための変分問題</u>　与えられた領域を二分して，一方では積分方程式で，他方では有限要素法で問題を解くことを考えよう。境界 $\partial\tilde{D}$ 上に Lagrange の未定係数 $\tilde{\lambda}, \tilde{u}, \lambda$ を導入して，ハイブリッド型の汎関数を D_F, D_I についてそれぞれ次の様に考える。

$$\Pi_{FH}(u,\tilde{\lambda},\tilde{u}) = \frac{1}{2}\int_{D_F}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} - \bar{f}u\right)dV - \int_{\partial D_{F2}}\bar{t}u\,dS - \int_{\partial\tilde{D}}\tilde{\lambda}(u-\tilde{u})dS \qquad (6)$$

$$\Pi_{IH}(v,t,\lambda,\tilde{u}) = \Pi_I(v,t) - \int_{\partial\tilde{D}}\lambda(v-\tilde{u})dS$$



領域 $D = D_F + D_I$ に対する汎関数を $\Pi = \Pi_{FH} + \Pi_{IH}$ で決めれば，

$$\begin{aligned}
\delta\Pi = &-\int_{D_F}(\mathbb{L}u + \bar{f})\delta u\,dV + \int_{\partial D_{F2}}(\mathbb{N}u - \bar{t})\delta u\,dS + \int_{\partial\tilde{D}}(\mathbb{N}u - \tilde{\lambda})\delta u\,dS \\
&- \int_{\partial\tilde{D}}(u-\tilde{u})\delta\tilde{\lambda}\,dS - \int_{\partial\tilde{D}}(v-\tilde{u})\delta\lambda\,dS + \int_{\partial\tilde{D}}(\tilde{\lambda}+\lambda)\delta\tilde{u}\,dS + \delta\Pi_I \\
&+ \int_{\partial\tilde{D}}\left\{\left[\frac{1}{2}t(x) + \int_{\partial D_I+\partial\tilde{D}}\mathbb{N}^x G(x;y)t(y)dS_y - \int_{\partial D_I+\partial\tilde{D}}\mathbb{N}^x\mathbb{N}^y G(x;y)v(y)dS_y\right] - \lambda(x)\right\}\delta v(x)dS_x
\end{aligned}$$

となって，境界値問題(1)は，付帯条件 $u=\bar{u}$ on ∂D_{F1}，$v=\bar{u}$ on ∂D_{I1} のもとで，汎関数 $\Pi(u,v,t,\lambda,\tilde{\lambda},\tilde{u})$ の変分問題に帰着された。

<u>融合解析法</u>　D_F については領域を，D_I については境界 $\partial D_I + \partial\tilde{D}$ を有限個の要素に分割し，D_F 上の u，∂D_I および $\partial\tilde{D}$ 上の v, t，$\partial\tilde{D}$ 上の $\lambda, \tilde{\lambda}, \tilde{u}$ を次のように表す。ただし，和の記号を省略するために表現は定義域全体について与えた。

$$u = \{U_\alpha\}^T\{\alpha\} + \{U_{\hat{\alpha}}\}\{\hat{\alpha}\}, \quad \left\{\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\} = [B_\alpha]\{\alpha\}, \quad \tilde{\lambda} = \{\tilde{M}\}^T\{\tilde{R}\}, \quad \tilde{u} = \{L\}^T\{g\} \qquad (7)$$

$$v = \{V_\beta\}^T\{\beta\} + \hat{\beta}, \quad t = \{T\}^T\{\gamma\}, \quad \lambda = \{M\}^T\{R\}$$

ここで，$\{\hat{\alpha}\}$, $\hat{\beta}$ は積分定数（弾性論では剛体変位）に対応するもので，分割によって生ずる自由度の分だけ必要になる。式(7)を Π に代入すれば次のようになる。

$$\begin{aligned}
\Pi(u,v,t,\lambda,\tilde{\lambda},\tilde{u}) \simeq &\frac{1}{2}\{\alpha\}^T[H]\{\alpha\} - \{\alpha\}^T\{\bar{Q}_\alpha\} - \{\hat{\alpha}\}^T\{\bar{Q}_{\hat{\alpha}}\} - \{\alpha\}^T\{\bar{Q}_{\alpha t}\} - \{\hat{\alpha}\}^T\{\bar{Q}_{\hat{\alpha}t}\} \\
&- \{\alpha\}^T[\tilde{F}_{\alpha R}]\{\tilde{R}\} - \{\hat{\alpha}\}^T[\tilde{F}_{\hat{\alpha}R}]\{\tilde{R}\} + \{g\}^T[\tilde{F}_{gR}]\{\tilde{R}\} \\
&+ \{\beta\}[E_{\beta\gamma}]\{\gamma\} + \hat{\beta}\{E_{\hat{\beta}\gamma}\}^T\{\gamma\} - \frac{1}{2}\{\gamma\}^T[D]\{\gamma\} - \frac{1}{2}\{\beta\}^T[C]\{\beta\} - \frac{1}{2}\hat{C}\hat{\beta}^2 \\
&- \{\beta\}^T\{C_{\beta\hat{\beta}}\}\hat{\beta} - \{\beta\}^T\{\bar{Q}_{\beta t}\} - \bar{Q}_{\hat{\beta}t}\hat{\beta} - \{\beta\}^T[F_{\beta R}]\{\tilde{R}\} - \hat{\beta}\{F_{\hat{\beta}R}\}^T\{R\} \\
&+ \{g\}[F_{gR}]\{R\}
\end{aligned} \qquad (8)$$

ここで，係数 $[H]$, $\{\bar{Q}_\alpha\}$, $\{\bar{Q}_{\hat{\alpha}}\}$ … などは式(7)を式(4), (6)に代入して得られる。式(8)の停留条件から，次の式が得られる。ただし，D_I 内部の v は $\{\beta\}$, $\hat{\beta}$, $\{t\}$ から式(2)を用いて求めなければならない。

$$\begin{bmatrix}
[H] & 0 & -[\tilde{F}_{\alpha R}] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -[\tilde{F}_{\hat{\alpha}R}] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-[\tilde{F}_{\alpha R}]^T & -[\tilde{F}_{\hat{\alpha}R}]^T & 0 & [\tilde{F}_{gR}]^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & [\tilde{F}_{gR}] & 0 & [F_{gR}] & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & [F_{gR}]^T & 0 & -[F_{\beta R}]^T & -\{F_{\hat{\beta}R}\} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -[F_{\beta R}] & -[C] & -\{C_{\beta\hat{\beta}}\} & [E_{\beta\gamma}] \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\{F_{\hat{\beta}R}\}^T & -\{C_{\beta\hat{\beta}}\}^T & -\hat{C} & \{E_{\hat{\beta}\gamma}\}^T \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [E_{\beta\gamma}]^T & \{E_{\hat{\beta}\gamma}\} & -[D]
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\{\alpha\} \\ \{\hat{\alpha}\} \\ \{\tilde{R}\} \\ \{g\} \\ \{\tilde{R}\} \\ \{\beta\} \\ \hat{\beta} \\ \{\gamma\}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\{\bar{Q}_\alpha\} + \{\bar{Q}_{\alpha t}\} \\ \{\bar{Q}_{\hat{\alpha}}\} + \{\bar{Q}_{\hat{\alpha}t}\} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \{\bar{Q}_{\beta t}\} \\ \bar{Q}_{\hat{\beta}} \\ 0
\end{bmatrix}$$

---

(1) 丹羽・小林・福井，積分方程式による連続体の有限要素構成，関西支部年次学術講演会概要集(1974)，I-10．

(2) 丹羽・小林・福井・東，積分方程式法による埋設物周辺の過渡応力の解析，土木学会論文報告集(1976) 248．

(3) Jaswon & Watson, Effective Numerical Treatment of Boundary-Integral Equations, Int. J. Num. Meth. Eng., 10 (1976).

(4) 岡村・島田；応力分配法と積分法の併用による3次元弾性問題の解析，関西支部年次学術講演会概要集(1977)，I-4

(5) 丹羽・福井，積分方程式法の弾性境界値問題への応用－数値解析手法に関する一考察－，関西支部講演概要(1977) I-7