

京都大学大学院

吉田幸司

京都大学工学部

小林昭一

1. はじめに

最近になって、積分方程式を用いて境界値問題を解く方法が注目されるようになり、種々の問題にその適用がはかられている。積分方程式自体は、場の微分方程式と境界条件の下で解いた解であるが、陽な解ではなく、一般に解析的と陽な解を求めることは困難であるので、数値的に解かれるのが普通である。

数値解法としては大きく分けて、i) 仮想境界を用いる方法、ii) 実境界を用いる方法とがある。いずれも数値計算の上では、積分を区間積分の和として表わすことになるので、積分区間の取り方、その数、密度分布の形状の仮定、などに解析精度は支配されると思われる。

この研究は、実境界を用いる方法により、密度分布の仮定による解析精度の変化を中心に、線形弾性境界値問題、特に一様応力場と孔の存在する場合の応力集中問題を例に、数値シミュレーションを行なうものである。

2. 積分方程式法

i) 弾性境界値問題の積分表示 ; 孔のある無限板が無限遠より一様応力を受けているものとする。(fig-1)

この問題は、一重層ポテンシャルを導入することにより次のように定式化される。

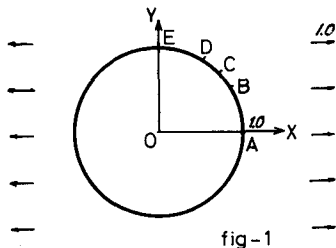
求める解を式(1)の形とすれば、境界条件が式(2)の形で与えられる外部点2種境界値問題は積分方程式(3)で与えられる。

$$u_i(x) = \int_S T_i^{(k)}(x; y) q_k(y) dS_y \quad \dots (1)$$

$$\int_{\Gamma_j} U_j(x) e = g_i(x) \quad \dots (2)$$

$$g_i(x) = -\frac{1}{2} q_i(x) + \int_S T_{i2}^{(k)}(x; y) q_k(y) dS_y \quad \dots (3)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} = \mu \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \mu n_j \frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda n_i \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \dots (4) \quad x, y \in S$$



ここで、 $u_i(x)$ は x での変位、 $T_i^{(k)}(x; y)$ は基本特異解、 $T_{i2}^{(k)}(x; y) = \frac{\partial}{\partial x_j} T_i^{(k)}(x; y)$ である。

ii) 密度 $q_k(y)$ の分布の仮定 ; (3) 式は境界を適当な区間に分割することにより、次のように書き直せる。

$$g_i(x_i) = -\frac{1}{2} q_i(x_i) + \sum_{j=1}^N T_{i1}^{(k)}(x_i; \xi_j) q_k(\xi_j) dS_{\xi_j} + \sum_{j=1}^N T_{i2}^{(k)}(x_i; \xi_j) q_k(\xi_j) dS_{\xi_j} \quad \dots (5)$$

$$g_2(x_i) = -\frac{1}{2} q_2(x_i) + \sum_{j=1}^N T_{21}^{(k)}(x_i; \xi_j) q_k(\xi_j) dS_{\xi_j} + \sum_{j=1}^N T_{22}^{(k)}(x_i; \xi_j) q_k(\xi_j) dS_{\xi_j}$$

ここで、 ξ_j は j 区間の座標を示すものであり、また、 x_i は i 区間の代表点であるとする。

ここで被積分区間 j 区間の x_i に対応する点 ξ_j での密度の値を $q_k(\xi_j)$ とする。($x_i = \xi_i$) ξ_j で 1 の値をとるような適当な関数 $A(\xi_j)$ を考え、 j 区間の密度の分布が $q_k(y_j) A(\xi_j)$ であると仮定することにより、(5) 式は次のように書き表わされる。

$$g_1(x_i) = -\frac{1}{2} q_1(x_i) + \sum_{j=1}^N q_1(\xi_j) \int T_{11}^{(k)}(x_i; \xi_j) A(\xi_j) dS_{\xi_j} + \sum_{j=1}^N q_2(\xi_j) \int T_{12}^{(k)}(x_i; \xi_j) A(\xi_j) dS_{\xi_j} \quad \dots (6)$$

$$g_2(x_i) = -\frac{1}{2} q_2(x_i) + \sum_{j=1}^N q_1(\xi_j) \int T_{21}^{(k)}(x_i; \xi_j) A(\xi_j) dS_{\xi_j} + \sum_{j=1}^N q_2(\xi_j) \int T_{22}^{(k)}(x_i; \xi_j) A(\xi_j) dS_{\xi_j}$$

従って、 $A(\xi_j)$ が適当に仮定することにより、密度 $q_k(y)$ が求まり、解が得られることになる。ここで、 $A(\xi_j)$ の仮定が妥当であるかどうかで、解の精度が大きく左右されると考えられるので、 $A(\xi_j)$ の選択は慎重に行なわなければならない。

3. 数値解析例

i) 円孔 ; 密度が一様に分布すると考えた場合には、積分法を 6 点とるガウス積分法と 12 点とるガウス積分

法の通りで行ない、また、一次関数の形の場合は12点のガウス積分法で行なう。(Table-1, 2, 3, 4)

6 and 12 points Gauss integral (Stress) $\phi: \text{const.}$				
		N=20	N=40	N=60
A	(6)	-1.162	-0.936	-0.841
	(12)	-1.276	-1.184	-1.016
B	(6)			0.125
	(12)			0.084
C	(6)		1.292	
	(12)		1.057	
D	(6)			2.189
	(12)			2.068
E	(6)	2.994	2.984	2.991
	(12)	3.004	3.003	2.997

Table-1

Stress $\phi: \text{1st order function}$ (12 points)				
		N=20	N=40	N=60
A	(6)	-1.084	-1.013	-1.002
	(12)			0.000
B	(6)			0.031
	(12)			0.000
C	(6)		1.041	
	(12)			1.000
D	(6)			2.028
	(12)			2.000
E	(6)	2.997	3.016	3.008
	(12)			3.000

Table-3

6 points Gauss integral (Displacement) $\phi: \text{const.}$				
		N=20	N=40	N=60
A	x	2.957	2.925	2.911
	y	0.000	0.000	0.000
B	x			2.525
	y			-0.473
C	x		2.077	
	y		-0.701	
D	x			1.459
	y			-0.845
E	x	0.000	0.000	0.000
	y	-1.001	-0.776	-0.971

Table-2

Displacement $\phi: \text{1st order function}$ (12 points)				
		N=20	N=40	N=60
A	x	2.960	2.957	2.956
	y	0.000	0.000	0.000
B	x			2.507
	y			-0.473
C	x		2.098	
	y		-0.672	
D	x			1.446
	y			-0.840
E	x	0.000	0.000	0.000
	y	-0.952	-0.767	-0.917

Table-4

これらの結果より、円孔等の特異性のない問題の数値解析においては、分割数を増すことによって境界の近似度、

区画積分の精度が上がること、解の精度が上がることがわかる。また、密度の分布を一樣であると仮定するよりは、一次関数で近似を行なう方が解の精度が良いことがわかる。

ii) 矩形孔 : fig-2に示すような無限板中に矩形孔が存在する場合の問題を対象に、解の精度を検討することとする。分割法は fig-3に示す。

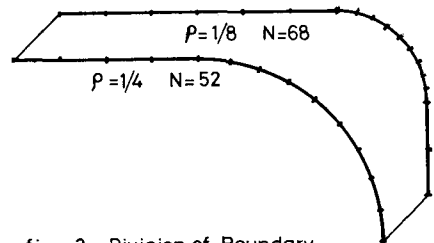
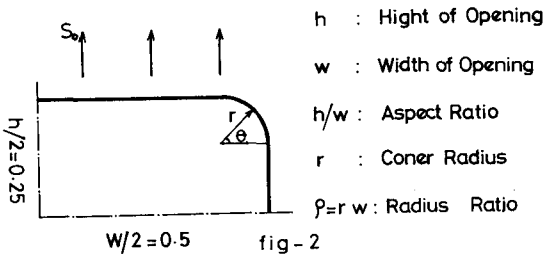


fig-3 Division of Boundary

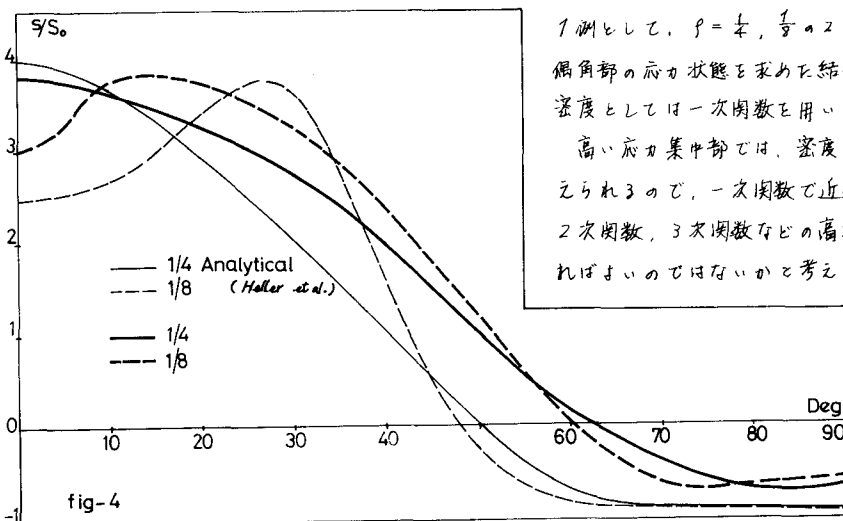


fig-4

1例として、 $\rho = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ の2つのケースについて、隅角部の応力状態を求めた結果を fig-4に示す。密度としては一次関数を用いた。

高い応力集中部では、密度の分布も急変すると思われるので、一次関数で近似するよりも、さらに二次関数、三次関数などの高次の関数の形で近似すればよいのではないかと考えられる。

文献: Heller, S.R., J.S. Brock, and R. Bart, Proc. 3rd U. S. National Congr. Appl. Mech., pp. 357-368, 1958