

電力中央研究所 正員 岸 徳光  
 北大 工学部 ・ 能町 純雄  
 電力中央研究所 ・ 高野 博

1. まえがき. 衝撃荷重による弾性体内の応力波の伝播性状を明らかにすることは、工学的にも興味ある問題であり、従来より、理論的、実験的にも多くの研究がなされている。しかしながら、弾性理論を適用して衝撃問題を忠実に解くことは、特殊な場合を除いてはかなり困難なことであり、ほとんどが近似理論で展開されているのが現状のようである。

本文は、特殊な場合として半無限弾性板が剛体に衝突した場合の問題をとりあげ、表面における応力波に限定してその伝播性状を解析的に検討を試みたものである。

2. 解析理論. 解析を単純にするために剛体に衝突させる代りに、図-1のように同一の半無限弾性板が同一の速度で衝突するものとする。この場合、衝突後の二弾性体は一体として挙動するものと仮定する。解析法は Skalak が円筒体についておこなった方法を採用する。

解は次に示すような2つの部分から成り立っている。

【1】.  $y=0$ 面を拘束した状態で二弾性体を衝突させる。

その結果、 $x$ の $z$ 領域の変位  $u$  は、

$$u = \begin{cases} -v^* t & x > c_p t \\ -\frac{x}{c_p} v^* & x < c_p t \end{cases} \quad \dots (1)$$

ただし、 $v^*$ は衝突速度であり、 $c_p$ は縦波動速度である。

したがって、 $\varepsilon_x, \sigma_{y0}$  は

$$\varepsilon_x = -\frac{v^*}{c_p} H(x - c_p t) \quad \dots (2),$$

$$\sigma_{y0} = -\lambda \frac{v^*}{c_p} H(x - c_p t) \quad \dots (3)$$

となり、 $y=0$ 面には、上式のような圧縮力が作用している。ただし  $\lambda$  は Lamé の定数である。

【2】. 自由表面を再現するために、図-2のような(3)と逆符号の引張力を  $y=0$ 面に作用させなければならぬ。以下にこの状態における波動伝播性状を平面歪問題の場合について解析する。

平面歪問題における力の釣合式および応力と変の関係式は、

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \dots (4)$$

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_y = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} \quad \dots (5)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

となる。ここで、変位、応力成分を次のように Fourier 積分の形であらわす。

$$\begin{aligned} [u \ \tau_{xy}]^T &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [U \ \tau_{xy}]^T \sin mx \, dm \\ [v \ \sigma_x \ \sigma_y]^T &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [V \ \sigma_x \ \sigma_y]^T \cos mx \, dm \end{aligned} \quad \dots (6)$$

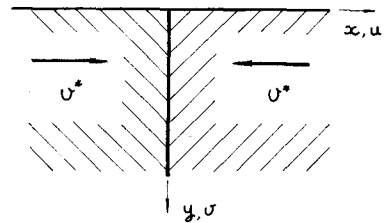


図-1

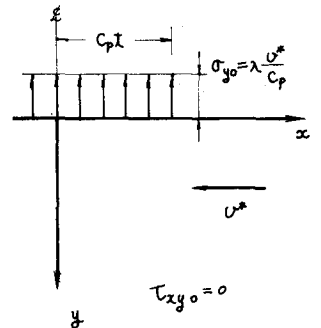


図-2

$$\text{ただし } [\bar{U} \bar{V} \bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_y \bar{\tau}_{xy}]^T = e^{-\alpha y} [\bar{U} \bar{V} \bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_y \bar{\tau}_{xy}]^T \quad \dots (7)$$

(7) を考慮し、(4), (5) に (6) を代入して (4) を変位で整理すると

$$\begin{bmatrix} m^2(\lambda+2\mu)-\alpha^2\mu & -m\alpha(\lambda+\mu) \\ m\alpha(\lambda+\mu) & m^2\mu-\alpha^2(\lambda+2\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \end{bmatrix} = -\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \end{bmatrix} \quad \dots (8)$$

(8) の両辺に  $e^{-\alpha t}$  を乗じ Laplace 変換を施す。ただし、 $t=0$  で変位、粒子速度は零である。これより (7) の  $\bar{U}, \bar{V}$  は次のように示される。

$$\begin{bmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_1 e^{-\alpha_1 y} \\ \bar{U}_2 e^{-\alpha_2 y} \end{bmatrix} \quad \dots (9)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし } \alpha_1^2 &= m^2 \left(1 + \frac{\bar{y}^2}{V_p^2}\right), \quad \alpha_2^2 = m^2 (1 + \bar{y}^2), \quad \bar{y} = m c_s \bar{y}, \quad \alpha_1^2, \alpha_2^2 > 0, \\ &= m^2 \alpha_1^2, \quad = m^2 \alpha_2^2, \quad C_s^2 = \mu/\rho, \quad V_p^2 = (\lambda+2\mu)/\mu, \end{aligned} \quad \dots (10)$$

である。図-2 に示された境界条件式  $\bar{\sigma}_{y0} = \lambda \frac{\partial^*}{\partial p} H(x - c_p t)$ ,  $\bar{\tau}_{xy} = 0$  に (6), (7), (9) を代入し、さらに Laplace 変換して整理すると

$$\begin{bmatrix} 2 + \bar{y}^2 & 2 \\ 2\alpha_1 & \frac{1}{\alpha_2}(2 + \bar{y}^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}[\bar{U}_1] \\ \bar{d}[\bar{U}_2] \end{bmatrix} = -\frac{1}{m\mu} \begin{bmatrix} \bar{d}[\bar{\sigma}_y] \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots (11)$$

以上より、すべての未知成分を決定することができる。

【3】、以上、【1】、【2】の部分の解が求まったので、これらを重ね合わせるによって全体としての解が完成する。特に軸変位  $E_x$  について考えることにすると、 $E_x$  は次のようになる。

$$E_x = -\frac{U^*}{C_p} H(x - c_p t) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda U^*}{\mu m^2 C_s^2} \left\{ \bar{d} \left[ \frac{-(2 + \bar{y}^2)}{\alpha_2} \frac{e^{-\alpha_1 y}}{(\bar{y}^2 + V_p^2) D} \right] + \bar{d} \left[ 2\alpha_1 \frac{e^{-\alpha_2 y}}{(\bar{y}^2 + V_p^2) D} \right] \right\} \cos mx \, dm$$

$$\text{ただし } D = \left\{ (2 + \bar{y}^2) - 4\alpha_1 \alpha_2 \right\} / \alpha_2 \quad \dots (12)$$

上式より  $y=0$  面においては

$$E_{x0} = -\frac{U^*}{C_p} H(x - c_p t) + \frac{2}{\pi} \frac{\lambda U^*}{\mu} \int_0^\infty \frac{1}{m^2 C_s^2} \bar{d} \left[ \left\{ 2\alpha_1 - \frac{(2 + \bar{y}^2)}{\alpha_2} \right\} \frac{1}{(\bar{y}^2 + V_p^2) D} \right] \cos mx \, dm \quad \dots (13)$$

となる。

上式の Laplace 変換の逆変換は  $\frac{F}{G}(\bar{y}) = \left\{ 2\alpha_1 - \frac{(2 + \bar{y}^2)}{\alpha_2} \right\} / D$  とおくと、 $G=0$ ,  $\bar{y}^2 + V_p^2 = 0$  より、前者からは Rayleigh 波速度に相当する  $\bar{y} = \pm \bar{y}_R i$ 、後者からは  $\bar{y} = \pm V_p i$  なる単極が存在することがわかるので次のようになる。すなわち、

$$\bar{d} \left[ \frac{F}{G(\bar{y}^2 + V_p^2)} \right] = \sum \left[ \frac{m C_s F}{(\bar{y}^2 + V_p^2) \frac{dG}{d\bar{y}}} \right]_{\bar{y} = \pm m C_s \bar{y}_R i} + \sum \left[ \frac{m C_s F}{G} \frac{e^{\bar{y} t}}{2\bar{y}} \right]_{\bar{y} = \pm m C_s V_p i} \quad \dots (14)$$

上式を (13) に代入して整理すると、

$$E_{x0} = -\frac{U^*}{C_p} H(x - c_p t) + \frac{2}{\pi} \frac{\lambda U^* A}{\mu (V_p^2 - \bar{y}_R^2) C_r} \int_0^\infty \frac{\sin m C_r t \cos mx}{m} dm + \frac{2}{\pi} \frac{U^*}{C_p} \int_0^\infty \frac{\sin m C_p t \cos mx}{m} dm \quad \dots (15)$$

となり、結局、

$$E_{x0} = \frac{\lambda U^* A}{\mu (V_p^2 - \bar{y}_R^2) C_r} H(x - c_r t) \quad \text{ただし } A(\bar{y}) = \frac{2\bar{y} F}{dG/d\bar{y}}, \quad C_r = C_s \bar{y}_R \quad \dots (16)$$

3. まとめ、以上より、半無限弾性板における縦衝撃は、境界の自由表面では Rayleigh 波速度で伝播し、 $y$  の増大とともに縦波速度 (12 より) で伝播するものと考えられる。

4. 参考文献 1) Sakai, R.: Longitudinal Impact of Semi-Infinite Circular Elastic Bar, Jour. of Applied Mech., PP59-64, Mar. 1957. 2) Fung, Y.C. 著、固体の力学/理論 邦訳 培風館。