

三井建設(株) 樋口 昇
山梨大学工学部 平島 健一

1. 緒言.

波動伝播による固体の動的な応答は、構造物に広範な被害を生じさせるような場合も多く存在する。例えば、地震、爆発、杭打ち作業、機械の作動によって生じる波動、超音速機、爆風等によって生じる衝撃波などに基づく地盤(地殻)の力学的挙動を明らかにすることは、工学、地球物理学、地震学などの分野において極めて重要な課題である。したがって、この種の問題は古くから膨大な数にのぼる研究がなされてきているが、これは応力伝播という本質的特徴をもっており、大別すると次の2つの場合に分類される。

[I] 定常状態の準静的な問題。 [II] 非定常の過渡応答状態の問題。

波動伝播の本質的特徴を失うことなく、かつ最も簡単なモデルとしては二次元の平面ひずみ状態が考えられるが、本論文では半無限弾性体の二次元問題と[II]の立場に立った研究が取り扱われる。この種の問題に対する従来までの研究の概略は以下のようなものである。すなわち、[I]に対して、Sneddonは半無限板の表面上に一定速度で移動する鉛直集中荷重の下での問題をFourier変換を用いて亜音速(移動速度 C が媒体の弾性波速度 C_1 , C_2 よりも遅い)状態のものとして解析した。Cole & Huth⁽¹⁾はGalileo変換と変位関数を用いてSneddonの解を、遷音速($C_2 < C < C_1$ の場合)、超音速($C_2 < C_1 < C$ の場合)状態にまで拡張した。Nawa & Kobayashi⁽²⁾は上述の3つの状態に対して分布荷重をも含めて一般解を求め、集中荷重が作用する場合の幾つかの計算例を示した。他方、[II]の問題としては“Lambの問題”が有名である。また、Ang⁽³⁾は変位関数とLaplace変換を用いてLambの問題の拡張をもつ鉛直集中荷重が媒体の表面に作用すると同時に一定速度(ただし亜音速状態、i.e. $C < C_2 < C_1$)で移動する問題を解き、閉じた形の解を提示した。なお、ここではLaplace変換を求めめるのにCagniardの方法が用いられている。最近になつてFreund⁽⁴⁾は[II]の問題で荷重作用後、一定の速度で移動する場合の問題を取り扱っている。

本論文では媒体表面に傾斜した集中荷重が作用後、一定速度(亜音速、遷音速および超音速の3つの場合)で移動する問題と考え、変位に関する弾性体の基礎方程式(i.e. Navierの方程式)とFourier変換およびLaplace変換を用いて解くことに試みたものである。なお、Laplace変換を求めめるために、Angと同じく、ここではCagniardの方法を用いる。また移動荷重以外の数種類の荷重状態の場合も取り扱われている。

2. 問題の設定と解法.

Fig. 1のように深さ方向に z 軸、実行方向に y 軸、表面上の右向きに x 軸とするとし、 y 軸方向に一定の線荷重を作用させることにより平面ひずみ状態を達成させ、したがってNavierの方程式は次の2式となる。

$$\mu \square_x u + (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} = 0, \quad \mu \square_x w + (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} = 0, \quad \square_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (1)$$

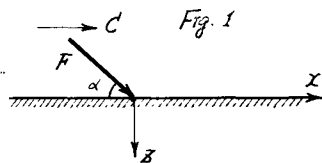
==に、 λ, μ : Lamé定数, $C_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$: 縦波の伝播速度, $C_2 = \sqrt{\mu/\rho}$: 横波の伝播速度, ρ : 密度。

u : x 方向変位, w : z 方向変位, $\varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}$: 体積ひずみ。

対象とする媒体に対する境界条件は以下のように与えられる。

$$\lim_{z \rightarrow 0} \sigma_{xz} = \lim_{z \rightarrow 0} \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -P_x, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \sigma_{zz} = \lim_{z \rightarrow 0} (\lambda \varepsilon_y + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}) = -P_z, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} (\sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \tau_{xz}) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} (u, w) = 0 \quad (2)$$

==に、 P_x, P_z はそれぞれ、傾斜した集中線荷重の水平、鉛直成分である。(1), (2)を x 軸に対してFourier変換、 t (時間)軸に対してLaplace変換と適用すると像空間において z に関する線形2階の微分方程式となり、したがって、問題をその方程式と(2)の境界条件の下で解くことに帰着される。その結果は以下のようなものである。



$$\left. \begin{aligned} L[F(u)] &= Ae^{-\gamma_1 x} + Be^{-\gamma_2 x} \\ L[F(u)] &= -i \frac{\alpha}{\gamma_1} Ae^{-\gamma_1 x} - i \frac{\gamma_1}{\alpha} Be^{-\gamma_2 x} \end{aligned} \right\} \dots (3) \quad \text{Fig. 2}$$

$$\left. \begin{aligned} 2\alpha^2 A + (\alpha^2 + \gamma_1^2) B &= i \frac{\alpha}{\mu} L[F(p_2)] \\ \gamma_1 (\alpha^2 + \gamma_1^2) A + 2\gamma_1 B &= \frac{1}{\mu} L[F(p_2)] \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

$\alpha = i$ に, α, p はそれぞれ Fourier 変換, Laplace 変換に対する像変数であり, γ_1, γ_2 は次式で与えられる。

$$\gamma_1^2 = \alpha^2 + \rho \rho^2 (\lambda + 2\mu), \quad \gamma_2^2 = \alpha^2 + \rho \rho^2 \mu \dots (5) \quad (T=1.0)$$

(4) に種々の荷重条件を代入して係数 A, B が決定される。なお, Laplace 変換と求めに際しては *Cagnard* の方法を用いた。

3. 数値結果と考察

ここでは数値計算では Poisson 比 $\nu = 1/3$ として実施した。

これは $C/G_2 = 2.0$ となり, 応力伝播領域が判りやすくなるためであって, 何ら本質的な仮定ではない。

(A) 集中走行荷重の場合: Fig. 2 において I は横波に, II は縦波によって乱された部分, III は先端波の領域である。周知の如く, 水下の部分の境界では応力は連続になる。Fig. 3 は鉛直集中荷重 Q が作用した場合の応力分布の一例であるが, 荷重作用後の経過時間パラメータ $T=100.0$ では荷重作用点直下付近で定常解 (Cole & Huth, Nima & Kobayashi) とほぼ一致している。このことから, 横波の到達距離 ($=G_2 t$) が着目している深さ ($=B$) の 100 倍程度まで伝播する過渡状態から定常状態に遷移しているといえる。ただし, 本論文の解では定常解では現れない荷重作用点前後に Rayleigh 波の影響によるピークが発生する。このことは荷重速度 C と Rayleigh 波速度 G_R の前後の大きさを比較して計算した Fig. 3 と Fig. 4 と比較すればよく理解できる。また, この Rayleigh 波の影響は深さと共に極めて早く減衰することが確認される。なお, 本解で静止状態 ($C=0$) としたものは, 定常解で現れるような特異性は発生せず (時間経過と共に) Boussinesq の解と一致する。なお, ここには示さないが, 超音速および超音速状態では非定常の擾乱は時間と共に非常に早く減衰し, きわめて短時間で定常状態となる。

(B) 集中衝撃荷重の場合: Fig. 5 から表面上での変位は Rayleigh 波の到達点で特異性をもつことがわかる。ここでは示さしていないが表面以外ではその点の特異性が失われることが確認されている。また, 表面は最初沈下し, 次に上昇するが振動は起こさず, 結果減衰状態となっている。1) J. Cole & J. Huth, J. Appl. Mech. (1958), p. 433 2) Y. Nima & S. Kobayashi, Mem. Fac. Eng., Kyoto Univ., Vol. 28 (1966), p. 254. 3) D. D. Ang, Quant. Appl. Math. Vol. 18 (1960), p. 251. 4) L. B. Freund, J. Appl. Mech. (1973), p. 699. 5) A. C. Eringen & E. S. Suhubi, *Elastodynamics* Vol. I, II, Academic Press (1975)

