

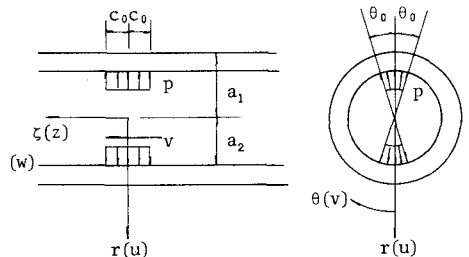
室蘭工業大学 正 員 松岡健一

北海道大学 正 員 能町純雄

北海道大学 学生員 三上 浩

1. まえがき 弾性体中にある厚肉円筒の問題は、円孔を有する無限体と厚肉円筒を重ね合わせて解析することができるが、ここでは円筒内を部分分布荷重が移動する動的な場合の解析を行なった。荷重の移動速度は一定であり定常的な状態として解析を行ない、弾性体と円筒の弾性定数比、円筒の厚さ、荷重の移動速度を変化させ、主として円筒の変位および応力の応答を検討した。

2. 移動荷重をうける無限円筒の変位 無限円筒の座標および各方向の変位を図-1に示す。この問題は動的3次元問題であるが、荷重の移動速度を一定とし、定常状態を考えているので、円筒軸方向の座標原点を移動する荷重の中心とするような座標変換(時間も t 、速度を V として $\zeta = z - Vt$ とする)を行なうことにより、時間の項を考慮することなく解析することができる。円柱座標で表わされる運動方程式を



上の座標変換を行ない、Fourier-Hankel変換を用いて解析することにより各変位成分の一般式を求めることができるが、ここではその結果のみを示す。

$$u = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} C_k (\tilde{A}_{mnr} + \tilde{B}_{mnr}) \cos m\theta e^{ikr} d\alpha, \quad (1) \quad v = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{A}_{mnr} - \tilde{B}_{mnr}) \sin m\theta e^{ikr} d\alpha, \quad (2)$$

$$\tilde{A}_{mnr} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\mu\alpha_s} \chi_{mp}^{(k)}(\alpha_s r) \{ d_{mnk} + 2\mu(m+1)A_{mnk} + 2\mu(m-1)B_{mnk} + \mu n_i E_{mnk} \} + \left(\frac{\mu}{2\mu+\lambda} - \frac{\mu}{pV^2} \right) \frac{1}{\alpha_p} \right. \\ \left. \times \chi_{mp}^{(k)}(\alpha_p r) + \frac{\mu}{pV^2} \frac{1}{\alpha_s} \chi_{mp}^{(k)}(\alpha_s r) \right] \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mnk} + (m+1)A_{mnk} - (m-1)B_{mnk} - n_i E_{mnk} \right\}, \quad (3)$$

$$\tilde{B}_{mnr} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{2\mu\alpha_s} \chi_{ms}^{(k)}(\alpha_s r) \{ d_{mnk} + 2\mu(m+1)A_{mnk} + 2\mu(m-1)B_{mnk} - \mu n_i E_{mnk} \} + \left(\frac{\mu}{2\mu+\lambda} - \frac{\mu}{pV^2} \right) \frac{1}{\alpha_p} \right. \\ \left. \times \chi_{ms}^{(k)}(\alpha_p r) + \frac{\mu}{pV^2} \frac{1}{\alpha_s} \chi_{ms}^{(k)}(\alpha_s r) \right] \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mnk} + (m+1)A_{mnk} - (m-1)B_{mnk} - n_i E_{mnk} \right\}, \quad (4)$$

$$w = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos m\theta \sum_{k=1}^{\infty} \left[G_m^{(k)}(\alpha_s r) E_{mnk} + \frac{2\mu i}{pV^2 n} \{ G_m^{(k)}(\alpha_p r) - G_m^{(k)}(\alpha_s r) \} \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mnk} + (m+1)A_{mnk} \right. \right. \\ \left. \left. - (m-1)B_{mnk} - n_i E_{mnk} \right\} \right] e^{ikr} d\alpha, \quad (5)$$

ここで、 μ, λ はLaméの弾性定数であり、 $m=0, 1, \dots$, $C_0=1/2$, $C_m=1$ (for $m \neq 0$), $\alpha_p^2 = n^2(1-pV^2/2\mu+\lambda)$, $\alpha_s^2 = n^2(1-pV^2/\mu)$, 式中の関数はHankel変換の逆変換公式よりえられるもので

$$G_m^{(k)}(\alpha r) = \frac{R_{m,m}^{(k)}(\alpha r)}{R_{m,m}^{(k)}(\alpha a_2)}, \quad \chi_{mp}^{(k)}(\alpha r) = \frac{R_{m+1,m}^{(k)}(\alpha r)}{R_{m,m}^{(k)}(\alpha a_2)}, \quad \chi_{ms}^{(k)}(\alpha r) = \frac{R_{m-1,m}^{(k)}(\alpha r)}{R_{m,m}^{(k)}(\alpha a_2)}, \quad k=1, 2$$

$$R_{j,m}^{(k)}(\alpha r) = I_j(\alpha r) K_m(\alpha a_{k-1}) - (-1)^{j+m} I_m(\alpha a_{k-1}) K_j(\alpha r), \quad j=m-1, m, m+1, \quad a_0=a_2$$

であり、 I, K はオー種およびノ種の変形Bessel関数である。また式中の係数は円筒の内外面の変位や応力のFourier変換値で与えられ、次のように示される。

$$d_{mnk} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} (T_{r\theta})_{r=a_k} \sin m\theta e^{ikr} d\alpha d\gamma, \quad \beta_{mnk} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} (O_r)_{r=a_k} \cos m\theta e^{ikr} d\alpha d\gamma,$$

$$A_{mnk} = \frac{1}{a_k} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \{ u \cos m\theta + v \sin m\theta \}_{r=a_k} e^{ikr} d\alpha d\gamma, \quad B_{mnk} = \frac{1}{a_k} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \{ u \cos m\theta - v \sin m\theta \}_{r=a_k} e^{ikr} d\alpha d\gamma,$$

$$E_{mnk} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} w_r = a_k \cos m\theta e^{i n r} d\theta dr.$$

これらの係数のうち A_{mnk} , B_{mnk} は変位の適合条件から次の条件を満足しなければならない。

$$\tilde{A}_{mnk}(r=a_k) = a_k A_{mnk} \quad k=1, 2 \quad (6)$$

$$\tilde{B}_{mnk}(r=a_k) = a_k B_{mnk} \quad k=1, 2 \quad (7)$$

以上無限円筒の解を示したが円孔を有する無限体の場合には、式(3)~(5)において $a_1 = \infty$ として $k=1$ の係数を消去し、関数を次のようにおけばよい。

$$G_m(\alpha r) = \frac{K_m(\alpha r)}{K_m(\alpha a_2)}, \quad X_{mp}(\alpha r) = -\frac{K_{m+1}(\alpha r)}{K_m(\alpha a_2)},$$

$$X_{ms}(\alpha r) = -\frac{K_{m-1}(\alpha r)}{K_m(\alpha a_2)},$$

また各応力成分は式(1)~(5)から Hooke の法則を用いて求めることができる。

3. 境界条件 弾性体中にある移動荷重をうける厚肉円筒の問題は、示した解を境界条件を満足するように重ね合せて解析することができる。今、無限体の弾性定数、係数などを添字 1 をつけて、また円筒のこれを添字 2 をつけて示し、弾性体と円筒の境界の変位は連続しているものとすれば、このときの境界条件は、

$$i) \tau_{r\theta}^1 = \tau_{r\theta}^2 \text{ for } r=a_1 \therefore \dot{\alpha}_{mn1} = \dot{\alpha}_{mn2},$$

$$ii) \sigma_r^1 = \sigma_r^2 \text{ for } r=a_1 \therefore \dot{\beta}_{mn1} = \dot{\beta}_{mn2},$$

$$iii) u^1 = u^2 \text{ for } r=a_1 \therefore \dot{A}_{mn1} = \dot{A}_{mn2},$$

$$iv) v^1 = v^2 \text{ for } r=a_1 \therefore \dot{B}_{mn1} = \dot{B}_{mn2},$$

$$v) w^1 = w^2 \text{ for } r=a_1 \therefore \dot{E}_{mn1} = \dot{E}_{mn2},$$

$$vi) \tau_{rz}^1 = \tau_{rz}^2 \text{ for } r=a_1$$

$$vii) \tau_{r\theta}^1 = \tau_{r\theta}^2 \text{ for } r=a_1 \therefore \dot{\alpha}_{mn1} = \dot{\alpha}_{mn2},$$

$$viii) \sigma_r^1 = p(\theta, z) \text{ for } r=a_1 \therefore \dot{\beta}_{mn1} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} p \cos m\theta e^{i n r} d\theta dr,$$

$$ix) \tau_{rz}^1 = 0 \text{ for } r=a_1$$

$$x) \tau_{r\theta}^1 = 0 \text{ for } r=a_1$$

$$xi) \sigma_r^1 = 0 \text{ for } r=a_1$$

$$xii) \tau_{rz}^1 = 0 \text{ for } r=a_1$$

$$xiii) \tau_{r\theta}^1 = 0 \text{ for } r=a_1$$

$$xiv) \sigma_r^1 = 0 \text{ for } r=a_1$$

$$xv) \tau_{rz}^1 = 0 \text{ for } r=a_1$$

$$xvi) \tau_{r\theta}^1 = 0 \text{ for } r=a_1$$

$$xvii) \sigma_r^1 = 0 \text{ for } r=a_1$$

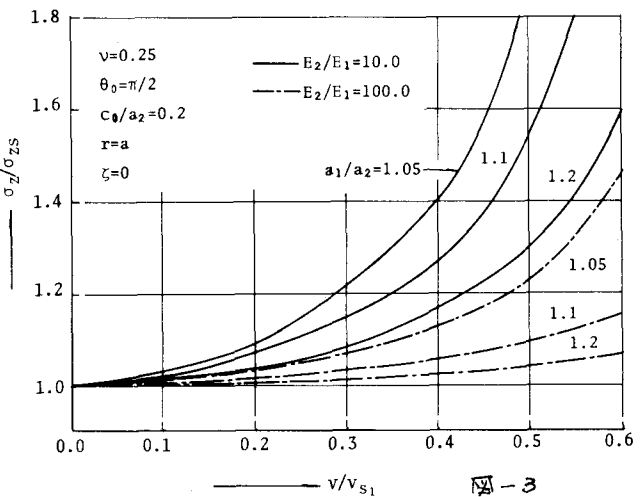
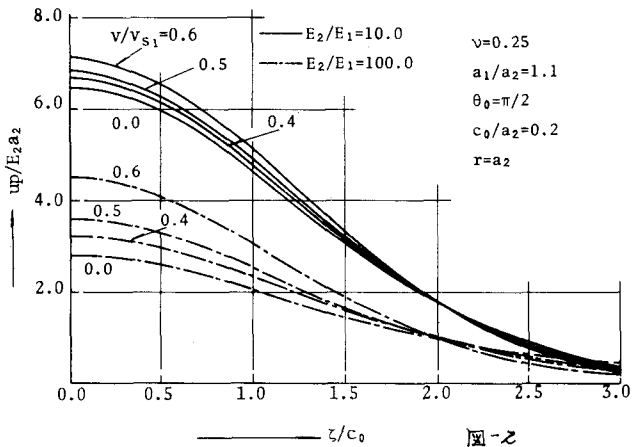
$$xviii) \tau_{rz}^1 = 0 \text{ for } r=a_1$$

$$xix) \tau_{r\theta}^1 = 0 \text{ for } r=a_1$$

$$xx) \sigma_r^1 = 0 \text{ for } r=a_1$$

$$xxi) \tau_{rz}^1 = 0 \text{ for } r=a_1$$

$$xxii) \tau_{r\theta}^1 = 0 \text{ for } r=a_1$$



4. 数値解析 数値計算例として $\mu_1 = \lambda_1 = 0.4E$ (E :弾性係数), $c_0/a_2 = 0.2$, $\theta_0 = \pi/2$, $\mu_2 = \lambda_2$, $\mu_1/\mu_2 = 10, 100$, $a_1/a_2 = 1.05, 1.1, 1.2$ の条件で、移動速度を変化させて解析を行った結果を図-2, 3に示す。図-2には、円筒内面の半径方向変位 u の z 方向の変化を、各移動速度に対して示した。図中 V_{s1} は弾性体のせん断波の速度 ($V_{s1} = \sqrt{\mu_1/\rho_1}$) である。図-3には軸方向応力 σ_z の値を移動速度の変化に対して、静的な場合の値との比で示した。いずれの場合でも移動速度が大きくなるに従って値が大きくなっているし、弾性体と円筒の弾性係数比では比の大きなものほど小さな値となっている。また図-2では速度の大きなものは変位が集中する傾向があり、図-3では円筒厚の薄いものほど大きな応答値を示しているのは、弾性係数の大きな場合と同様、円筒の剛性の大きなものが応答値が小さくなるという結果を示している。

※参考文献: i) 松岡, 能町: 土木学会論文報告集 229号 p. 11, ii) Matsushita, Nomachi: THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS Vol. 25, p. 123, iii) 松岡, 能町: 土木学会論文報告集 254号 p. 13