

高知県土木部 正員 高橋 大助
東北大学工学部 正員 佐武 正雄
同上 学生員 須田 徳

1. はじめに

材料の微視的性質を考慮した一般化された連続体力学の研究が種々行なわれており、偶応力理論はその最も基礎的なものである。偶応力理論を金属材料に適用しようとした実験はいくつも行なわれている。¹⁾金属材料に比べて、脆性材料は内部構成粒子が大きく、また内部に多くの空けきを含んでいる為に、偶応力の影響が生じやすいと考えられるので、本研究は、偶応力理論を適用し、脆性材料の圧縮試験より求められるヤング率と曲げ試験のみかけのヤング率の違いを考察することにより、脆性材料の特性長の推定を試みたものである。

2. 脆性材料の曲げ試験への偶応力理論の適用

偶応力を考慮に入れた二次元平面応力問題の直交座標における基礎方程式は、 ϕ と ψ を応力関数、 l を材料の特性長、また ν をポアソン比として

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = 0, \quad \nabla^2 \psi - l^2 \nabla^2 \nabla^2 \psi = 0 \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\psi - l^2 \nabla^2 \psi) &= -\frac{2}{1+\nu} l^2 \nabla^2 \phi \\ \frac{\partial}{\partial y}(\psi - l^2 \nabla^2 \psi) &= \frac{2}{1+\nu} l^2 \nabla^2 \phi \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

と記される。²⁾ ここで ∇^2 はラプラシアンである。応力関数 ϕ と ψ から各応力成分は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, & \sigma_y &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, & \tau_{yx} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \\ \mu_x &= \frac{\partial \psi}{\partial x}, & \mu_y &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

として求められる。ここに μ_x と μ_y は偶応力である。図-1に示す曲げ問題への偶応力理論の適用について説明する。この場合の境界条件としては

$$\left. \begin{aligned} Y = -L_4: \tau_{yx} = 0, \mu_y = 0, \sigma_y &= -\frac{A_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \alpha x \\ Y = L_4: \tau_{yx} = 0, \mu_y = 0, \sigma_y &= -\frac{B_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \alpha x \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$X = \pm L_1: \int_{-L_4}^{L_4} \sigma_x dy = 0, \int_{-L_4}^{L_4} y \sigma_x dy = 0, \int_{-L_4}^{L_4} \mu_x dy = 0 \quad (5)$$

を用いることにする。ここに A_n と B_n はそれぞれ荷重と反力のフーリエ係数で

$$A_0 = \frac{P}{L_1}, \quad A_n = \frac{P}{\pi \epsilon_1} \frac{1}{n} \sin \alpha \epsilon_1$$

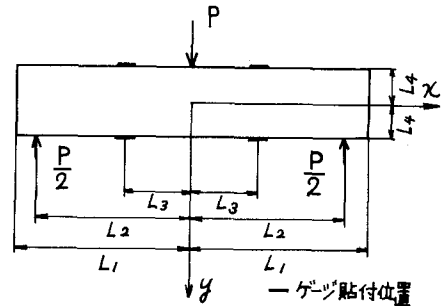


図-1 曲げ試験馬蹄

$$B_0 = \frac{P}{L_1}, \quad B_n = \frac{P}{\pi \epsilon_1} \frac{1}{n} \cos \alpha L_2 \sin \alpha \epsilon_1$$

であり、 $2\epsilon_0 \leq 2\epsilon_1$ はそれぞれ荷重と反力の分布幅である。対称性より $\phi = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(Y) \cos \alpha x$, また $\psi = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(Y) \sin \alpha x$ とおけば、(1)式より

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cosh \alpha y + C_s \sinh \alpha y + C_y \cosh \alpha y + C_{ys} \sinh \alpha y) \cos \alpha x \\ \psi &= \sum_{n=1}^{\infty} (K_n \cosh \alpha y + K_s \sinh \alpha y + K_y \cosh \alpha y + K_{ys} \sinh \alpha y) \sin \alpha x \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

となる。ここに $\alpha = n\pi/L_1$, $\beta = \sqrt{1 + l^2 \alpha^2}/l$ である。式(6)の係数は(2)式と(4)式より得られる。更に応力関数

$$\phi' = \frac{P}{6} y^3, \quad \psi' = Kx \quad (7)$$

をつけ加える。定数 K と K は(5)を満足するように決定することにする。

次に、上記の理論計算と実験より、材料の特性長 l を推定する方法について述べる。圧縮試験より求めら

れるヤング率 E を用いれば、曲げ試験におけるひずみ測定位置での応力 σ_x と ϵ_x との関係は

$$\sigma_x = E \epsilon_x \quad (8)$$

となる。この式は偶応力を考慮した場合にも成立する。一方、古典弾性理論から計算される応力 σ_x^* とひずみの実験値 ϵ_x を用い

$$\sigma_x^* = E^* \epsilon_x \quad (9)$$

とおけば、 E^* は曲げ試験におけるみかけのヤング率と考えられる。(8)式と(9)式より、 $E^*/E = \lambda$ とおけば

$$\lambda = \sigma_x^* / \sigma_x \quad (10)$$

となる。したがって λ の特性長 l に対する変化は(10)式の σ_x^* / σ_x より求められる。図-1において、 $L_1=8\text{cm}$, $L_2=7\text{cm}$, $L_3=3\text{cm}$, $L_4=2\text{cm}$ とおけば、 λ は図-2に示す曲線となる。図-2によれば、特性長 l が大きくなると曲げ試験のみかけのヤング率 E^* が圧縮試験から求められるヤング率 E よりも大きくなることが予想され、また、逆に、材料の特性長 l は λ が与えられれば、図-2により定められることになる。

3. モルタル供試体を用いた実験と考察

インストロン型万能材料試験機(島津オートグラフ5000)を使用し、モルタル供試体(40×40×160mm, 砂の均等係数1.88, フロー値190±5mm, $W/C=0.55$ および 0.65 , 養生材令7日)に対して圧縮試験と、写真-1と図-1に示す曲げ試験を行なった。ヤング率 E は圧縮試験により、また供試体の曲げ試験のみかけのヤング率 E^* は圧縮線と引張線のひずみを測定して求めた。以前までの実験では圧縮線と引張線のひずみにほとんど差が認められず、 $\lambda=1.1$ で特性長として $l=0.26$ の値が求められていた。しかしその後の検討により、支承上で水平反力が生じている可能性も考えられたので、今回の実験では供試体と支承の間に厚さ3mmのネオプレンゴムを挿入することにした。その結果、引張線のひずみは圧縮線のひずみよりも大きくなり、3本の供試体から求めた λ の平均値は $W/C=0.55$ と 0.65 の各場合に対してそれぞれ 1.04 と 0.97 となった。図-2より $\lambda=1.04$ に対する特性長は $l=0.17\text{cm}$ であるが、 $\lambda=0.97$ に対応する l は求められず、供試体の本数がそれぞれの W/C について3本であったことや、実験値のバラツキ等を考慮すれば、上述の実験だけからモルタル供試体の特性長を決定することは困難であると思われる。

4. おすび

偶応力理論を脆性材料の曲げ試験に適用して特性長を求める方法を説明し、モルタル供試体に関する若干の実験結果について報告した。今までの実験結果からだけでは、脆性材料に対する偶応力理論の適否を論ずることは困難と考えられるので、更に、特性長 l が大きいと思われる供試体——粒径の大きい砂粒子や気泡を大量に含むもの——を用いて、モルタル供試体に対する偶応力の影響を詳細に調べる必要があると考えている。なお、本研究は昭和51年度科学研究費(一般研究(B)課題番号146103)の補助を受けたものであることを付記する。

参考文献のShijve, J.: J. Mech. Phys. Solids, 14, 113 (1966), (2) Mindlin, R.D.: Exp. Mech., 3, 1 (1963).

(3) 佐武, 岸野, 高橋: 東北支部技術研究発表会講演概要, 11 (1977).

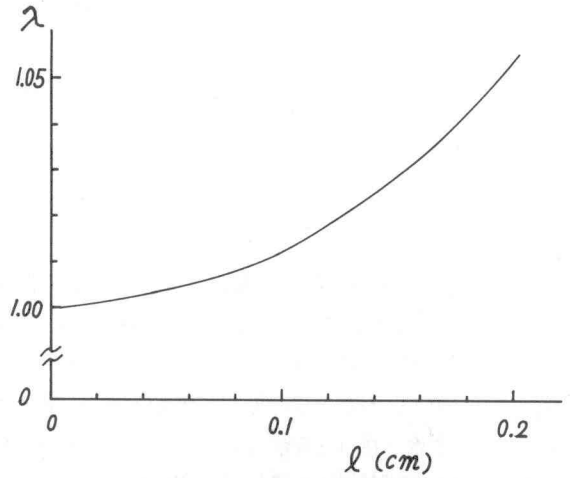


図-2 $\lambda-l$ 曲線

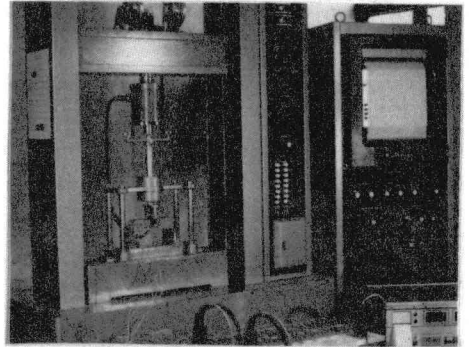


写真-1 モルタル供試体の曲げ試験