Ⅳ－155　ＦＥＭによる交通流解析

九州大学　正会員　樗木　武
〃　　学生員　○土居　隆彦

1．まえがき　　交通流理論として，圧縮性流体との相似を活用するものがあり，一様なパイプ状道路交通で，途中区間での流出，入交通のない問題に適用し，興味ある結果がえられている。しかし，実際には各道路区間で道路定数は変化し，また流出，入交通が存在するとともに，それらが時間的に変化するため複雑な現象を呈し，上述の単純理論で説明できないことも多々ある。そこで，より厳密な交通流理論の確立が望まれるが，その一法として拡散型の運動方程式にもとづく交通流の基礎式を誘導のうえ，ＦＥＭの概念を導入することが考えられ，本研究の内容とするものである。

2　交通流の基礎方程式　　道路の微小区間dxに着目し，その間の時刻tにおける交通量の流出，流入収支から，周知の連続方程式が誘導でき，その結果は次のとおりである。

$$\frac{\partial D}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}-q=0 \qquad (1)$$

ここに，Q：交通量　D：交通密度
q＝単位長さ当りの発生交通量－吸収交通量

また，道路軸の始点$x=0$における交通速度をV_0，任意点xにおけるそれをVとするとき，運動方程式に相当するものとして次式を考えることができる。

$$Q=DV=-k\,\partial D/\partial x+V_0 D \qquad (2)$$

ここに，k：定数でその内容は§4に説明するとおりである。

上式は拡散の運動方程式と同様の概念にもとづくもので，右辺第1項は物質輸送に関するFickの法則に，第2項は熱輸送におけるFourierの法則に対応する項である。

式(2)を式(1)に代入すれば，次式がえられ，これが著者らの提案する交通流の基礎微分方程式である。

$$\partial D/\partial t+V_0\,\partial D/\partial x-k\,\partial^2 D/\partial x^2-q=0 \qquad (3)$$

計算に当っては，適当な微小時間きざみΔt毎に逐次追跡を行うものとし，第(I)段階目の時間$t=t^{(I)}$におけるD，V_0，k，qを$D^{(I)}$，$V_0^{(I)}$，$k^{(I)}$，$q^{(I)}$と記号表示する。

時刻$t^{(I)}$から$t^{(I+1)}=t^{(I)}+\Delta t$間の任意の時刻$t$におけるD，$\partial D/\partial x$，$\partial^2 D/\partial x^2$を次のような$t$の一次式で近似する。

$$\left.\begin{aligned}
&D=D^{(I)}+\frac{1}{\Delta t}(t-t^{(I)})(D^{(I+1)}-D^{(I)}) \qquad \frac{\partial D}{\partial x}=\left(\frac{\partial D}{\partial x}\right)^{(I)}+\frac{1}{\Delta t}(t-t^{(I)})\left\{\left(\frac{\partial D}{\partial x}\right)^{(I+1)}-\left(\frac{\partial D}{\partial x}\right)^{(I)}\right\}\\
&\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\right)^{(I)}+\frac{1}{\Delta t}(t-t^{(I)})\left\{\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\right)^{(I+1)}-\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\right)^{(I)}\right\}
\end{aligned}\right\} (4)$$

また，V_0，kについても同様に考えることができるが，これらはDのレベルに応じて決まる定数と考え$t^{(I)}\leqq t\leqq t^{(I+1)}$間で，近似的に$V_0=V_0^{(I)}$，$k=k^{(I)}$とする。また，$q$に関しても，時間増分$\Delta t$の間一定とする。

すなわち，流出入交通量はΔtきざみで段階状に変化するものとする。これらの近似を考慮して，式(3)の両辺を時刻$t^{(I)}$，$t^{(I+1)}$間で定積分すれば次式がえられ，これが実用上の交通流基礎微分方程式である。

$$k^{(I)}\bar{D}''-V_0^{(I)}\bar{D}'-2/\Delta t\,\bar{D}+2/\Delta t\,D^{(I)}+q^{(I)}=0 \qquad (5)$$

ここに，$D'=\partial D/\partial x$，$D''=\partial^2 D/\partial x^2$，$\bar{D}=1/2\,(D^{(I+1)}+D^{(I)})$

3．ＦＥＭによる定式化　　いま，道路を適当な微小区間に分割し，その一要素ijの密度を$\bar{D}_{ij}$として，次式を仮定する。

$$\bar{D}_{ij}(\xi)=[1\ \xi]\,\boldsymbol{a} \qquad (a)$$

ここに，$\boldsymbol{a}=[a_1\ a_2]^T$（未定々数），$\xi=x/l_0$（$l_0$：規準長さ）

要素ijの両端i，jの密度を$\bar{D}_i$，$\bar{D}_j$と記号表示すれば，これらは，式(a)に$\xi=0$，ε_{ij}（$=l_{ij}/l_0$）を代入することによりえられ，その結果から未定々数$\boldsymbol{a}$が次のように定められる。

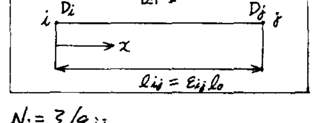


図1

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1/\varepsilon_{ij} & 1/\varepsilon_{ij}\end{bmatrix}\bar{\mathbf{D}}_{ij} \qquad (b)$$

ここに，$\bar{\mathbf{D}}_{ij}=\left\{\bar{D}_i\ \ \bar{D}_j\right\}^T$

式(b)を式(a)に代入すれば，$\bar{D}_{ij}=[N_i\ \ N_j]\,\bar{\mathbf{D}}_{ij}$　(6)　ここに，$N_i=1-\xi/\varepsilon_{ij}$，$N_j=\xi/\varepsilon_{ij}$

さて，節点iに直接結合しない要素領域では$N_i=0$とすると，展開関数は試行関数の和になる。重み関数として

N_mを用い　式(5)にGalerkin 法を適用すれば次式をうる。

$$\int_L N_m k^{(I)} \bar{D}'' ds - \int_L N_m V_0^{(I)} \bar{D}' ds - \int_L \frac{2}{\Delta t} N_m \bar{D} ds + \int_L N_m \frac{2}{\Delta t} D^{(I)} ds + \int_L N_m g^{(I)} ds = 0 \qquad (c)$$

ここに，
L：要素領域

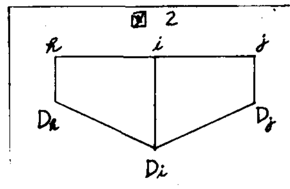
式(b)の試行関数は，2次微分をもたない。そこで，次のように，要素内での一般化された導関数を定義するものとすれば　式(c)の第1項が計算できることになる。

$$\int_L N_m k^{(I)} \bar{D}'' ds = \left[N_m k^{(I)} \bar{D}' \right] - \int_L N_m' k^{(I)} \bar{D}' ds \qquad (d)$$

式(d)は，要素内においては正しいが，式(c)を計算するに際しては，用いた試行関数が一次式であるから，一次導関数が境界で不連続になることを考慮しなければならない。すなわち，境界iで，不連続性から式(c)に，4つの寄与があり

$$I = \int (\tilde{N}_k + \tilde{N}_i) k^{(I)} \bar{D}'' ds + \int (N_i + N_j) k^{(I)} \bar{D}'' ds$$

図 2



となる。ここで，$\tilde{N}_k + \tilde{N}_i = 1$，$N_i + N_j = 1$であるから，不連続性の寄与は結局次のようになる。　$I = k^{(I)} \bar{D}' |_{kioi} - k^{(I)} \bar{D}' |_{ijoi}$　　(e)

式(e)の境界項は，式(d)の境界項の和を打ち消すものであり，したがって，この項は何もせず無視できることになる。また，外部境界点をmとすれば，$N_i(x_m) = 0$であり，したがって，式(d)の境界項は，外部境界において消滅する。

以上の所論を踏えるとき，重みつき残差に対する重み関数N_mによる寄与Δが次のように求められる。

$$\Delta = -\frac{k^{(I)}}{l_0} \varepsilon_{ij} b_m (b_i \bar{D}_i + b_j \bar{D}_j) - V_0^{(I)} (b_i \bar{D}_i + b_j \bar{D}_j)\left(a_m \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} b_m \varepsilon_{ij}^2\right) + \frac{2 l_0 \varepsilon_{ij}}{\Delta t} \Big[\Big\{ a_i a_m + (a_i b_m + b_i a_m) \frac{\varepsilon_{ij}}{2} + b_i b_m \frac{\varepsilon_{ij}^2}{3} \Big\} (D_i^{(I)} - \bar{D}_i)$$
$$+ \Big\{ a_j a_m + (a_j b_m + b_j a_m) \frac{\varepsilon_{ij}}{2} + b_j b_m \frac{\varepsilon_{ij}^2}{3} \Big\} (D_j^{(I)} - \bar{D}_j) \Big] + g^{(I)} l_0 \left(a_m \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} b_m \varepsilon_{ij}^2\right)$$

上式において，$m = i, j$に対する2式を求め，まとめてマトリックス表示すれば，終局的に次式がえられる。

$$\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{A}_{ij} \mathbf{D}_{ij}^{(I+1)} - \mathbf{B}_{ij} \mathbf{D}_{ij}^{(I)} - \frac{g^{(I)}}{2} l_0 \varepsilon_{ij} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_{ij} \mathbf{D}_{ij}^{(I+1)} - \mathbf{B}_{ij} \mathbf{D}_{ij}^{(I)} - \mathbf{Q}_0 \qquad (7)$$

ここに，$\mathbf{A}_{ij} = \frac{k^{(I)}}{2 l_0 \varepsilon_{ij}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{V_0^{(I)}}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \frac{l_0 \varepsilon_{ij}}{6 \Delta t} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，$\mathbf{B}_{ij} = \frac{-k^{(I)}}{2 l_0 \varepsilon_{ij}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{V_0^{(I)}}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \frac{l_0 \varepsilon_{ij}}{6 \Delta t} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

式(7)を全要素についてたて，これを用いて全体方程式を組み立てれば，式(c)に代る

$$[\mathbf{A}_{ij} \mathbf{D}_{ij}^{(I+1)}] - [\mathbf{B}_{ij} \mathbf{D}_{ij}^{(I)}] - [\mathbf{Q}_0] = \mathbf{0}$$

なる式がえられ，これが時刻$t^{(I+1)}$における本題の基本連立方程式である。したがって，これに境界条件を考慮して解けばよいことになる。

4. kについて　　一般に，Q－D関係は図3のような曲線で与えられ，要素の始端iの密度D_iに対する割線係数がV_0である。他方，j節点の交通流量をQ_jとすれば式(2)より

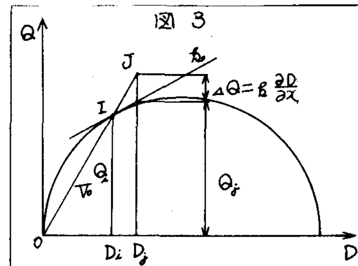
$$Q_j = -k \partial D / \partial x + V_0 D_j$$

のようにえられる。

上式の第2項は図の点Jを与えるものであり，したがって，第1項は曲線と点Jとの補正量ΔQを意味する。点I(D_i, Q_i)におけるQ－D曲線の接線勾配をk_0とすれば近似的にΔQが次のように算定される。

$$\Delta Q = (V_0 - k_0)(D_j - D_i) \qquad \text{よって} \qquad k \cdot \frac{D_j - D_i}{l_{ij}} = (V_0 - k_0)(D_j - D_i)$$

図 3



であり　これからkを次のように定義することができる。　$k = (V_0 - k_0) l_{ij}$　　(8)

参考文献　1) Greenberg, H.: An Analysis of Traffic Flow, Operations Res., vol.7, No.1, 1959, PP. 79～85

2) Edie, C. and S. Foote: Traffic Flow in Tunnels, Proc. Highway Res. Board, vol.37, 1958, PP.334～344

3) Filayson, B.A.: The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, New York, 1972 (鷲津他訳, 培風館, 1974), PP. 139～143