Ⅳ-86　最適ネットワークの構成問題に関する一考察

大阪市立大学大学院　学生員　日野 泰雄
大阪市立大学工学部　正 員　西村 昂

1. はじめに

ネットワークの最適化問題については、従来から様々の角度（たとえば、要因の組み合わせによる制約条件と目的関数の評価、あるいは、最適化過程に生じる諸問題など）で検討されている。そこで、今回、本研究では、最適化の過程に注目し、これに対し、数理計画法（特に非線形計画法）によるアプローチを試みた。

2. 数理計画による問題の定式化

ネットワーク問題のもつ特性から、数理計画法の中でも、線形計画法および整数計画法が効果的に適用されるものと考えられる。そこで、本稿では、この両者（ただし、前者についてはすでに定式化した[1]ので、ここでは混合整数問題を含む線形整数問題）についての定式化を行った。その際、各OD交通ごとにアーク・フローを考え、アーク $k\ell$ に流れるODペア ij のフローを $f_{ij}^{k\ell}$ とした。

(1). 線形整数問題

制約条件式に整変数の不連続な関数を含む場合の問題を扱うものであるが、ここでは、『建設費－容量』の関係が図－1のようなステップ関数で表される場合について定式化した。

1) OD交通量保存条件式

$$\sum_k f_{ij}^{k\ell} - \sum_k f_{ij}^{\ell k} = \begin{cases} f_{ij} & (k=i) \\ -f_{ij} & (k=j) \\ 0 & (k\neq i,j) \end{cases} \qquad 式(1)$$

2) カット容量制約条件式

$$C_{ki} \geqq f_{cki} \qquad 式(2)$$

3) 非負制約条件式

$$f_{ij}^{k\ell} \geqq 0 \qquad 式(3)$$

4) 建設費及び容量に関する制約条件式

$$\sum_i \sum_j f_{ij}^{k\ell} \leqq C^{k\ell} = \sum_m c_m \cdot x_m \qquad 式(4)$$

$$S_c \geqq \sum_k \sum_\ell S^{k\ell} = \sum_k \sum_\ell \left(\sum_m s_m \cdot x_m \right) \qquad 式(5)$$

ただし、 $x_m = 0 \text{ or } 1$, $0 \leqq \sum_m x_m \leqq 1$ 　式(6)

ここに、　C_{ki} は i 番目のカットのカット容量
f_{cki} は i 番目のカットのカット需要交通量
S_c は制約建設費、$C^{k\ell}$、$S^{k\ell}$ はそれぞれアーク $k\ell$ の容量および建設費を示す。

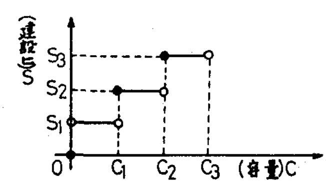

図-1.『建設費-容量』関数

以上の制約条件式の下に、総走行台距離を最小にする問題（式(7)）とした。

5) 目的関数（総走行台距離）

$$F = \sum_k \sum_\ell \left(\ell_{k\ell} \cdot \sum_i \sum_j f_{ij}^{k\ell} \right) \longrightarrow \min. \qquad 式(7)$$

(2). 非線形整数問題

線形整数問題をさらに拡張し、目的関数を非線形とした場合について考えるものである。ここでは、混雑度の概念により走行時間を表し、総走行台時間を最小にすることを目的とした。したがって、(1)～(6)の制約条件式の下に、式(8)を最小にする問題となる。

6) 目的関数（総走行台時間）[2]

$$T = \sum_k \sum_\ell \left[\left\{ a_{k\ell} \cdot (F_{k\ell}/C_{k\ell})^4 + b_{k\ell} \right\} \cdot F_{k\ell} \right] \longrightarrow \min. \qquad 式(8)$$

ここに、　$F_{k\ell} = \sum_i \sum_j f_{ij}^{k\ell}$,　$F_{k\ell}/C_{k\ell}$ は混雑度（ただし $\leqq 1$）
$a_{k\ell}$. $b_{k\ell}$ は定数とする。

さらに式(7),(8)を貨幣価値に換算し、式(9)で表される建設費を含めた総費用最小化問題を考えることもできよう。

7) 目的関数（総費用）

$$E = \alpha F + \beta T + \gamma S \longrightarrow \min. \qquad 式(9)$$

ここに　α、β、γ は、換算係数（= const.）
S は、総建設費（$= \sum_k \sum_\ell S^{k\ell}$）

3. 解法と問題点

2. で定式化した問題を効率よく解くために、ここでは、擬ブール代数法[3]を応用した解法を用いた。以下に、その簡単な手順を示す。

ステップ1. カット容量制約の強い制約から順にチェックし、それらの制約を満たす一次解の集合（S_1）を求める。

2. 一次解集合（S_1）で建設費制約を満たす解の集合を二次解集合（＝実行可能解集合 S_2）とする。

3. 二次解集合（S_2）について目的関数を計算し、最適解を決定する。

次に、定式化およびその解法で注意すべき点について考えてみよう。

まず、制約式(2)は式(1),(4)と重複すると考えられるが、擬ブール代数法では、式(1),(4)から一次解を求めることが容易ではないのに対し、式(2)を導入することによって容易に一次解を誘導することができる。しかも、これを満たす解は自動的に式(1)、(4)をも満足しており、そういった意味から、この式を一次解誘導条件式とよぶことができよう。このように、目的関数に影響を与えることなく、一次解集合の誘導を容易にする制約式の導入は問題を解くために重要な意味をもつと考えられる。したがって、本稿では、カット容量制約式を導入したわけであるが、これに代わる考え方として、ネットワーク・パターンにOD交通量を配分する方法が考えられる。この場合、本稿で行ったような小規模問題においては余り有効ではないが、ネットワークの規模が大きくなってもフロー配分は可能であり、そのような場合にはかなりの有効性がみられよう。

また、式(8)のパラメータaは混雑度に関する係数であり、各路線の交通量を考慮するか、あるいは、全路線共通と考えてよいが、bは各路線距離を考慮すべきであろう。

4. 計算例

以上の定式及び解法により、図-3,4、表-1,2,3に示すモデル例（式(7),(8)を目的関数とする問題）を解いた結果を図-5,6に示す。（図中の数字は路線を通る交通量、アークの線の数は車線数を示す。） ただし、制約建設費は45億円で、本例題の一次解集合、二次解（実行可能解）集合の要素の数はそれぞれ116　7であった。

表-1 地点間距離 (km)

	1	2	3	4
1		7	6	4
2			5	12
3				5
4				

表-2 OD交通量 (台/日)

	1	2	3	4
1		1000	2000	0
2			0	1500
3				500
4				

表-3 パラメータ a, b

パラメータ＼アーク	1-2	1-3	1-4	2-3	2-4	3-4
a	4	4	4	4	4	4
b	2	2	1	1.5	3	1.5

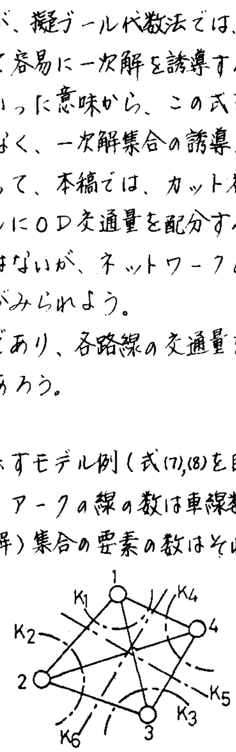

図-3. 最大ネットワークとカット

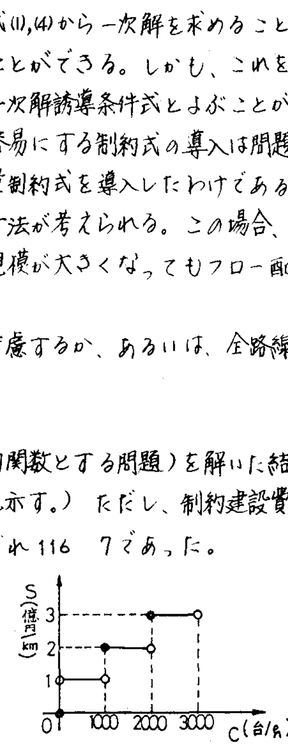

図-4.『建設費-容量』関数

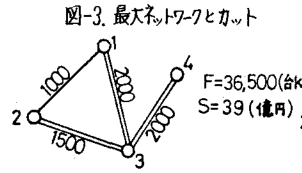

図-5 線形整数問題の最適解

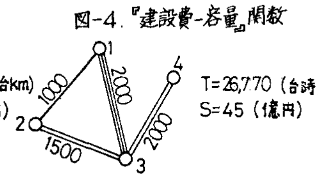

図-6. 非線形整数問題の最適解

5. むすび

以上、本稿では、非線形のネットワーク最適化問題の数理計画法による処理を試みたわけであるが、問題が複雑化しつつある現在、このような非線形問題に対処し得る計画法がさらに重要になると考えられよう。しかし、上記計算例でも一次解が100通りを超え、問題が大きくなるにつれ計算量が膨大になるため、先に述べたように問題に応じた一次解誘導条件式を考慮すること、あるいは、コンピューター・プログラム化が必要となろう。

参考文献 1) 西村・日野「最適ネットワーク形成に関する一考察」 1976年 土木学会関西支部 講演概要 IV-22-1

2) LARRY J. LEBLANC「An Algorithm for the Discrete Network Design Problem」 Transportation Science Vol.9 No.3 p.p.183～199, 1975

3) Peter L. Hammer, Sergin Rudeanu「Boolean Methods in Operations Research and Related Areas」 Springe-Verlag, 1968