IV-47　　輸送回数を変数とする輸送問題に関する一考察

京都大学工学部　正員　山本幸司
京都大学工学部　正員　吉川和広

1. はじめに　土木施工の分野においては，機材輸送計画，整地工事の運土計画のように，最適資源配分方法が線形計画法の輸送問題としてモデル化できる現象が多く，運土計画を例にとれば次式のようにモデル化できる。

$$\left.\begin{aligned}&\sum_j x_{ij} = a_i \qquad (i=1,2,\cdots,m)\\&\sum_i x_{ij} = b_j \qquad (j=1,2,\cdots,n)\\&\sum_i\sum_j x_{ij} = \sum_i a_i = \sum_j b_j\ ,\ x_{ij} \ge 0\end{aligned}\right\} \text{——(1)}$$

$$z = \sum_i\sum_j C_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \qquad \text{——(2)}$$

ここに，x_{ij}：切土ブロックiから盛土ブロックjへの運土量
a_i：切土ブロックiの切土量（締固めた状態に換算）
b_j：盛土ブロックjの盛土量
C_{ij}：切土ブロックiから盛土ブロックjへ1m³運土するときの目的関数の値（運土単価（円/m³），運土距離（m）など）
z：評価基準を表わす目的関数式（運土費用（円），仕事量（m×m³）など）

上の例で明らかなように，従来の最適資源配分計画ではその輸送量を変数として扱うモデル化が多かった。しかしながら，現実問題として資源を1単位ずつ独立に輸送することは稀であり，一定の積載容量を持つ輸送施設によって資源輸送がなされることの方が多い。このような場合に，より厳密な最適配分方法を求めるためには，輸送量ではなく輸送回数を評価の対象とすべきことは明白であろう。以下に簡単な例によってこれを証明する．

いま容量20m³のスクレーパによる運土計画が式(1)，(2)としてモデル化され，$x'_{ij}=10$，$x''_{ij}=15$が基底解の一部であり，$C'_{ij}=C''_{ij}\ (=C)$と仮定すれば，式(2)よりそれぞれの目的関数値は，

$$\left.\begin{aligned}z_1 &= C'_{ij}x'_{ij} = 10C\\z_2 &= C''_{ij}x''_{ij} = 15C\end{aligned}\right\} \text{——(3)}$$

となり，2つの運土作業に対する目的関数値は$z_1/z_2 = 2/3$と評価される。しかし，これらの作業はともにスクレーパ1往復の運土作業で完了するため，$z_1 = z_2$と評価しうるような方法を考えなければならない。このためには，上述したように輸送施設の積載容量を考慮した輸送回数を変数とするモデル化が有効である。

本研究は以上の考え方に基づいて，輸送回数を変数とするモデル化をいくつか提案するものである。

2. 輸送回数を変数とする輸送型問題の定式化　以下では運土計画を事例として各モデルを説明する。

モデル1　まず輸送回数を変数とする最も厳密な定式化としては，制約条件式(1)に，

$$n_{ij} \ge x_{ij}/Q \qquad n_{ij} = 0,1,2,\cdots \qquad (4)$$

ここに，Q：輸送施設の積載容量，n_{ij}；輸送回数

を加え，目的関数式を，

$$z = \sum_i\sum_j \overline{C_{ij}}\, n_{ij} \rightarrow \min \qquad \text{——(5)}$$

ここに，$\overline{C_{ij}}$；切土ブロックiから盛土ブロックjへの運土作業1回当りの目的関数値（場合によって$C_{ij}=\overline{C_{ij}}$）

と変形する。この定式化は式(1)のa_i, b_jが実数（整数）であれば混合（全）整数計画問題となる。しかし整数計画問題を実用的範囲内で解きうるのは変数の数が100程度であるため，切土ブロック数mと盛土ブロック数nの和が50程度の運土計画しか解析できない。

モデル2　モデル1の修正モデルとして制約条件式を

$$\left.\begin{aligned}&\sum_j Q n_{ij} \ge a_i \qquad n_{ij} = 1,2,\cdots\\&\sum_i Q n_{ij} \ge b_j\\&\left(\sum_i a_i = \sum_j b_j\right)\end{aligned}\right\} \text{——(6)}$$

と変更する。この定式化も整数計画法としてのモデル化ではあるが，モデル1に比べると変数の数が半減するため，$m+n \le 100$程度の運土計画ならば十分に解析可能である。しかしながら，モデル2で求まるのは切土ブロックiから盛土ブロックjへの最適運土回数であり，その運土量を直接求めることはできない。このため，基底解として得られた$m+n$個のn_{ij}に対して逆に積載容量Q_{ij}を変数として，

$$\left.\begin{aligned}&\sum_j n_{ij} Q_{ij} = a_i\\&\sum_i n_{ij} Q_{ij} = b_j\end{aligned}\right\} \text{——(7)}$$

という$m+n$元の連立一次方程式を解く必要がある。なおこの方法によれば，容量や性能の異なる複数機種を投入する場合でも以下のような定式化が可能である。

$$\left.\begin{array}{l} \sum_k \sum_j Q_k n_{ijk} \geqq a_i \quad k=1,2,\cdots \\ \sum_k \sum_i Q_k n_{ijk} \geqq b_j \\ \left(\sum_i a_i = \sum_j b_j\right) \end{array}\right\} \text{——} (8)$$

$$Z = \sum_k \sum_i \sum_j C_{ijk} n_{ijk} \rightarrow \min \quad \text{——} (9)$$

ここに，Q_k：機種kの積載容量，n_{ijk}；機種kでブロックiからブロックjへ運搬する土量．

モデル３　モデル２の制約式(6)をQで割り，さらに，

$$\left.\begin{array}{l} \sum_j n_{ij} \geqq \left[\frac{a_i}{Q} + \frac{Q-\varepsilon}{Q} \right] = a_i' \\ \sum_i n_{ij} \geqq \left[\frac{b_j}{Q} + \frac{Q-\varepsilon}{Q} \right] = b_j' \\ \sum_i \sum_j n_{ij} = \sum_i a_i' = \sum_j b_j' \end{array}\right\} \text{——} (10)$$

によって右辺を整数化した制約条件式のもとに式(5)の目的関数を考える。これは運土回数を変数とする輸送問題としての定式化であるため，式(10)の第３番めの条件式が成立すればMODI法によって簡単に最適解を求めることができる。しかし一般には，式(6)を式(10)と変形する際に需給バランスが崩れる可能性が強く，この場合には適当な処置が必要となる。

モデル４　制約条件式(1)および目的関数式(2)をそのまま用い，まず輸送量x_{ij}を変数とする輸送問題を解く。つぎに最適解の基底変数$\hat{x}_{ij}$を，

$$\hat{n}_{ij} = \left[\frac{\hat{x}_{ij}}{Q} + \frac{Q-\varepsilon}{Q} \right] \quad \text{——} (11)$$

によって運土回数$\hat{n}_{ij}$に変換し，目的関数の値も，

$$Z = \sum_i \sum_j \overline{C}_{ij} \hat{n}_{ij} \quad \text{——} (12)$$

と修正する。しかしこのモデルでは式(12)で得られる値が制約条件式(1)のもとでの最適値となる保証はない。

以上の各モデルを比較すると，モデル１，２は整数計画法，モデル３，４は輸送問題としての定式化となっている。したがって，計算効率からいえばモデル３，４がはるかに有利であり，特にモデル１は変数の数が多すぎるため，非常に小さな資源配分計画にしか適用できない。さらに，モデル１，２は輸送型の係数行列が持つ性質をその解法に効率よく利用できる方法がないことも欠点の１つである．

3．適用事例による各モデルの比較

本稿では簡単な事例として，供給地および需要地が各々10箇所である表－1に示すような資源配分計画をモデル３およびモデル４として解析する。まず，輸送量を変数とするモデル化（式(1)，式(2)）を考えたところ最適解は$Z=2{,}086{,}000$であった。次に輸送施設の積載容量Qを20，200，2000，4000と変化させて輸送回数を変数とする定式化（モデル３）を考え，各ケースの最適解の値を示したのが表－2である。これより以下のことが明らかとなる。

① 需給量a_i, b_jに比べて積載容量Qが非常に小さい場合には，輸送量x_{ij}を変数とするモデルと輸送回数n_{ij}を変数とするモデルの最適解は一致する。したがって，モデル１，２，３を考える必要はなく，モデル４の処置で十分である。

② 積載容量Qが大きくなってくると，モデル４では目的関数の評価値が悪くなり，輸送回数を変数とするモデル化が必要となる。

次に，さらに簡単な事例（$m=3, n=4$）をモデル２およびモデル３として解析したところ両者の最適解が完全に一致した。これは式(6)（Qで割っておく）の係数行列が輸送型（ユニモジュラー）であり，不等式系を等式系に変換した際にその行列要素が１or０or－１のみとなるためである．これに関しては講演時にもう少し具体的に触れることにする．

4．おわりに

従来のような輸送量ではなく，輸送回数を変数とすることによって，実際現象に即した資源配分計画モデルをいくつか提案したが，計算効率上からもモデル３が最適なものと考えられた。しかしモデル３では，式(10)の第３式が成立しない場合の検討等が今後の課題である．

表－1 適用事例の輸送計画

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}	供給量 x1,000
S_1	40	30	20	32	10	28	22	58	57	41	8
S_2	14	22	32	20	50	32	61	20	32	50	15
S_3	32	22	14	20	10	14	22	45	42	30	6
S_4	20	22	28	14	41	20	50	14	20	36	18
S_5	22	20	22	10	32	10	40	22	22	28	10
S_6	36	28	22	22	14	10	20	41	36	20	7
S_7	36	32	30	22	28	10	32	30	22	14	13
S_8	64	67	50	50	32	36	20	61	50	20	9
S_9	51	50	51	40	50	32	50	28	14	22	22
S_{10}	54	51	50	41	45	30	42	36	22	14	20
需要量 x1,000	10	24	9	6	11	8	6	13	16	25	128

表－2 各ケースの目的関数値

積載容量Q ＼ 目的関数値Z	モデル３を適用した場合の目的関数値	モデル４を適用した場合の目的関数値
1　20	104,300	104,300
2　200	10,430	10,430
3　2000	1,080	1,080
4　4000	590	640