IV-46　施工計画における工事用資源配分の数学モデルについて

京都大学工学部　正員　春名　攻

1．数学モデルによるアプローチのねらい

土木工事の施工において，工法・材料その他の技術面での支配的な要素がすでに決められているとすると，工事プロジェクトのマネイジメントにとって，工事用資源の運用方法は，工程・原価・品質の管理要素の内容を，大きなウェイトを持って支配する重要な計画対象であるといえる。これまでに，工事用資源の運用のための配分モデルとしてPERT/MANPOWERやRAMPSを始めとする多くの技法が開発されてきている。これらは土木工事のみならず，あらゆる製造業で重要視されているが，数学モデルによるアプローチはきわめてまれである。これは運用計画のための配分モデルが，本質的に多くの変数を持つ組合せ問題となることから，数学モデルによるアプローチが効率的な方法とはなりにくく，実用的な観点からのヒューリスティックな技法の開発に対してより多くの努力が払われてきたためである。一方計画・管理技術を発展させるという立場からは，数学的なモデル分析をとおして，最適解を追求することが，必然的に解（計画案）の性質を厳密に規定することにつながるとともに，より効率的な求解の方法の開発は，ヒューリスティックな技法（いわば，近似解法）の改良へのよりよい情報を与えることになる。このため，本研究では，このような観点から，計画・管理技術の科学化という立場にたつて，現在考えられる数学モデルによるアプローチについて論じたいと考えるものである。

2．Graph理論を利用した配分モデル

本アプローチでは，プロジェクト・ネットワークを有向グラフとして把握し，同時刻で実施可能な作業の組合せを求めると，グラフ理論のカットと同じような概念に到達する。つまり，有向グラフをGとすると，Gの全ノードの集合Nを，始点ノードsを含むノードの集合N_sと，終点ノードを含むノードの集合N_tに分割するような一つのカットを$\mathbf{C}^{(k)}$ ($k=1,2,\cdots,K$；Kはそのようなカットの全数をあらわす)が求められる。ただし，$\mathbf{C}^{(k)}$に含まれる（要素の値が1の）アークは順方向アーク(アクティビティ)のみとする。同時刻で実施可能な作業集合（組合せ）を${}^{i}\mathbf{a}^{(k)}$ ($i=1,2,\cdots,I$)とすると，カット$\mathbf{C}^{(k)}$と関係するI個の組合せ$\{{}^{i}\mathbf{a}^{(k)} \mid i=1,2,\cdots,I\}$はこのようなカットとつぎのような関係を有している。

$$\mathbf{C}^{(k)}-{}^{i}\mathbf{a}^{(k)} \geq \mathbf{0}$$

ただし，$\mathbf{C}^{(k)}=(C_1^{(k)}, C_2^{(k)}, \cdots\cdots, C_m^{(k)})'$，${}^{i}\mathbf{a}^{(k)}=({}^{i}a_1^{(k)}, {}^{i}a_2^{(k)}, \cdots {}^{i}a_m^{(k)})'$

$$C_\ell^{(k)}=\begin{cases}1, & \text{アーク}\ell\text{がカットに含まれているとき。}\\ 0, & \text{そうでないとき}\end{cases}\qquad {}^{i}a_\ell^{(k)}=\begin{cases}1, & \text{アーク}\ell\text{が同時作業の集合に含まれているとき。}\\ 0, & \text{そうでないとき}\end{cases}$$

したがって，グラフ理論によって求められるカットの集合の有する代数的(リニア・トポロジー的)な性質の(すべてではないが)大部分を，この同時作業の組合せパターン${}^{i}\mathbf{a}^{(k)}$が満足させることがわかる。ただし，パターン${}^{i}\mathbf{a}^{(k)}$はこのほかに資源量の制約の条件：$\sum_{\ell=1}^{m} {}^{i}a_\ell^{(k)} r_\ell^h \leqq R^h$ (ただし，r_ℓ^hは資源h ($h=1,2,\cdots,H$)の作業ℓの使用量，R^hは資源hの量)を満たさねばならない。このため，同時作業のパターン${}^{i}\mathbf{a}^{(k)}$(の集合)は，カットの代数的性質にもとづく条件と，この制約条件を同時に満足させなければならないが，解集合の性質はいずれも代数(あるいはリニア・トポロジー)の理論により求めることができる。また運用計画はこのパターンを実行可能なように配列しなければならないが，この配列の方法も，カット間の順序関係の解析をもとに明確にすることができる。つまり，パターン間の順序関係はカット間の順序関係の一種の写像として求められるからである。カット集合の要素$\mathbf{C}^{(k)}$と$\mathbf{C}^{(k')}$の満たすべき順序関係は${}^{i}\mathbf{a}^{(k)}$と${}^{i}\mathbf{a}^{(k')}$との間にそのまま写像されると考えてもよい。このカット間の順序関係についての理論は未だ発展していないが，代数的な表現を行なうことにより，その性質をトポロジー的に示すことができる。したがって，実行可能な運用計画の持つべき性質も理論的に明確化される。運用計画のための配分モデルは，これらの実行可能な解集合の中から，評価尺度（たとえば工期）を最小（あるいは最大）にするような解を発見する問題となる。以上で，グラフ理論にもとづくアプローチの概要を示したが，詳細は講演時に例とともに示すことにする。

3．0－1計画法によるモデル化

上と同様に，作業が実施されている状態を1であらわし，実施されていない状態を0であらわすと，資源の制約のもとで評価尺度（たとえば工期）を最小（あるいは

最大）にする配分問題は、0－1計画法の問題として、つぎのように定式化できる。さて，モデル化にあたり，この問題の制約条件と目的関数をつぎのように示すことにする。

①作業の先行・後続条件 ――― 施工技術的な制約により，作業iが作業jに先行する場合，作業i，jの終了期を t_i，t_j とし，作業jの所要時間を d_j とあらわすと，$t_i+d_j \leqq t_j$ となる。ここで，次のような変数 X_{it} を定義する。

$$X_{it}=\begin{cases}1, & \text{作業iが第t期で終了する場合。}\\ 0, & \text{その他の場合。}\end{cases}$$

ここで，$t_i=\sum_{t=E_i}^{L_i} t\cdot X_{it}$ とおきかえて次式をえる。

$$\sum_{t=E_i}^{L_i} t\cdot X_{it}+d_j \leqq \sum_{t=E_j}^{L_j} t\cdot X_{jt}$$

ただし，E_i を作業iの最早完了時刻（iに関する定数）とし，L_i を作業iの最遅完了時刻（iに関する定数）とする。

②資源量に関する制約条件 ――― 作業iが第t期において実行中であると，$(t+d_i-1)$ 期までに終了期がある。また，$\mathrm{Min}_i\, E_i \leqq t \leqq \mathrm{Max}_i\, L_i$ を満たす各期tで資源使用量は利用可能量 R_t をこえてはならないので，

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{q=t}^{t+d_i-1} r_i X_{iq} \leqq R_t$$

ただし，$\mathrm{Min}_i\, E_i \leqq t \leqq \mathrm{Max}_i\, L_i$，Nは作業の総数を表わす。

③作業終了条件 ――― 作業iは必らず終了し，変数 X_{it} は定義域（$E_i \leqq t \leqq L_i$）においてただ1つのtに対してだけ1の値をとる。ここで変数を1つへらすためと，他の条件式にあわせて不等式系に表現するために，$X_{iE_i}=1-\sum_{t=E_i+1}^{L_i} X_{it}$ とおく。よって

$$\sum_{t=E_i+1}^{L_i} X_{it} \leqq 1$$

④目的関数（1つの例として示す。）――― 最大の E_i をもつ作業iに対して便宜上のダミー作業Dを後続作業として組み入れる。このダミー作業の終了期の最小化は工期の最小化と等価である。ダミー作業の終了を，区間 $\underline{\lambda} \leqq t \leqq \bar{\lambda}$ において，X_{opt} であらわすと目的関数は次式のように示される。

$$\sum_{t=\underline{\lambda}}^{\bar{\lambda}} t\cdot X_{opt} \longrightarrow \mathrm{Min.}$$

（$\underline{\lambda}$，$\bar{\lambda}$ は最適工期の存在範囲の下限と上限を表わしており、それぞれ定数として決定できる。）

本モデルの適用例については講演時に示すが，工事プロジェクトが大きくなれば，組み合せが幾何級数的に増大し実用的でなくなることが実証的に確認された。一方複数プロジェクト間での主要建設機械の運用問題もこのモデルに準じて定式化できるが，プロジェクトiの対象機械の使用終了期を X_{it} で，また保有機械の台数を R_t とあらわせばよい。また，最小の E_i と最大の E_i をもつプロジェクトに対し，先行あるいは後続する仮想のダミープロジェクトを設定し，この2つのプロジェクトでの機械使用終了期をさしひいた期間（全機械の拘束期間）を最小化することとして目的関数を設定することができる。この場合のモデルはよく機能し実用化しうることがわかったが，実際例とともに演算上の問題点なども講演時に示すこととする。

4. ネットワーク・フロー理論によるモデル化

工程をネットワークを用いて表示すると、資源の運用状況は、数種の資源がネットワークのノード－アークを資源利用上の制約条件を満たすように流れなければならない。つまり，$f_{ij}^{(h)}$ を作業iと作業jの間の資源hの流れとすると，ある工期のもとで

$$\sum_{i\in I(j)} f_{ij}^{(h)} \geqq r_j \quad \Bigl(\text{あるいは} \sum_{j\in J(i)} f_{ij}^{(h)} \geqq r_i\Bigr)$$

$$\sum_{i\in I(j)} f_{ij}^{(h)} = \sum_{k\in J(j)} f_{jk}^{(h)}$$

$$\sum_{j\in J(0)} f_{0j}^{(h)} = \sum_{i\in I(n)} f_{in}^{(h)} = \mu^{(h)}$$

（ここで，$h=1,2,\cdots,H$，$I(j)$ は作業jの先行作業の集合を表わし，$J(i)$ は作業iの後続作業の集合をあらわす。また $i,j=1,2,\cdots,n$ とする。）

において流量 $\mu^{(h)}$ のそれぞれを最小にするようなフロー $\{f_{ij}^{(h)} \mid (i,j)\in G,\ h=1,2,\cdots,R\}$ を求めるネットワークフローの問題となる。この問題を運用計画の情報をうるため，工期との関係で系統だてて解いていくとき，つまり，流量の系 $\{\mu^{(h)}\}$ の内容を徐々に減少させる（投入資源量を減少させる）とき，工期をそれに見あうだけおくらせなければならないが，1つの考え方として，この時間を最小にしようとする問題の定式化が試みられる。この問題は著名な Min.Cut－Max.Flow 定理と逆の立場の Max.Cut－Min.flow の問題であり、Max.Cut を与える作業間に新たなフローを生じさせる（工期ののびを最小にするように時間的な順序関係をつける。）ことにより，流量（資源量）を減少させうることがわかっている。この問題は一種のパラメトリック・プログラミングとなっているが，CPM のように理論的に系統だてたアルゴリズムは未完成の段階であり、講演時にこれについてもふれたいと考える。