IV－22　海域への汚濁インパクトを考慮した水資源支流域配分モデルに関する理論的考察

(株) 日本水道コンサルタント　正員○辻本善博
〃　　〃　萩原良巳
〃　　〃　中川芳一

1．はじめに；　参考文献1)において、筆者らはある1つの流域に注目し、その汚濁負荷量の公共用水域へのインパクトを最小にするような水資源配分問題を考察した。本稿ではそのモデルの理論的考察を試みる。

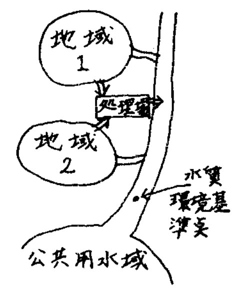
2．モデルの定式化；　図－1に示すような、本川に2つの支川が流入しており、1支川に1つの地域が対応している流域を考察の対象とする。また流域内には下水処理場が1つ存在し、この2つの地域の負荷が取り入れられているとする。
このとき、河川の自浄作用を無視すると水質環境基準点での負荷量および流量の年次変化はつぎのようになる。記号は表－1に掲げた。（ ・は時間微分を意味する。）

$$\dot{x}_1(t)=\dot{L}(t)=\sum_{i=1}^{2}\left(\dot{D}_i(t)\cdot A_i(t)+D_i(t)\cdot\dot{A}_i(t)\right)+\dot{F}(t) \quad (1)$$

$$\dot{x}_2(t)=\dot{Q}(t)=\sum_{i=1}^{2}\left(\dot{C}_i(t)\cdot A_i(t)+C_i(t)\cdot\dot{A}_i(t)\right)+\dot{E}(t) \quad (2)$$

ただし
$$D_i(t)=(1-u_i^{r}(t))\cdot W_i(t)\cdot(1-u_i^{a}(t))+\ell(t)\cdot u_i^{a}(t)$$
$$C_i(t)=\lambda_i(t)\cdot(1-u_i^{a}(t))+u_i^{a}(t)$$
$$F(t)=g_1(t)+g_2(t)$$
$$E(t)=g_1^{u}(t)+g_2^{u}(t)$$

図－1



表－1

L	環境基準点の負荷量
Q	〃　流量
$1-u_i^{r}$	市街地流達率
W_i	負荷強度
A_i	発生汚水量(利水量)
u_i^{a}	下水道整備率
g_i	市街地以外からの自然流達負荷量
g_i^{u}	固有流量
λ_i	流出率
ℓ	処理場放流水質

ここで　$\theta_i=dA_i(t)/dt$ を操作変数とみれば、(1)(2)式は地域水配分モデルの状態方程式となる。そして操作変数にかかる制約条件としては次式を考える。

$$0\le\theta_i(t)\le\alpha_i(t)\ ,\qquad \sum_{i=1}^{2}\theta_i(t)\le\beta(t) \quad (3)$$

第1式は地域 i での水資源配分量の上下限を決め、第2式は全流域の水資源量の増加が新規水資源開発量以下であるという意味である。
つぎに評価式であるがこれは、水資源配分増加量を大きく、汚濁負荷量を小さくという立場より次式とする。（ε は補正定数）

$$J=\int_0^T\left(\varepsilon/x_1(t)+\sum_{i=1}^{2}\theta_i(t)\right)dt\longrightarrow max \quad (4)$$

3．解法とアルゴリズム；
上の問題の解法として最大原理を用いる。そのため新たな状態変数として

$$x_0(t)=\int_0^t\left(\varepsilon/x_1(t)+\sum_{i=1}^{2}\theta_i(t)\right)dt,\quad x_3(t)=A_1(t),\quad x_4(t)=A_2(t)$$

を付け加えると、状態方程式は以下のようになる。ただし $(x_0(0),x_1(0),x_2(0),x_3(0),x_4(0))=(0,L(0),Q(0),A_1(0),A_2(0))$.

$$\dot{x}_0(t)=f_0(x(t),\theta(t))=\varepsilon/x_1(t)+\sum_{i=1}^{2}\theta_i(t)$$
$$\dot{x}_1(t)=f_1(x(t),\theta(t))=D_1(t)\cdot\theta_1(t)+D_2(t)\cdot\theta_2(t)+\dot{D}_1(t)\cdot x_3(t)+\dot{D}_2(t)\cdot x_4(t)+\dot{F}(t)$$
$$\dot{x}_2(t)=f_2(x(t),\theta(t))=C_1(t)\cdot\theta_1(t)+C_2(t)\cdot\theta_2(t)+\dot{C}_1(t)\cdot x_3(t)+\dot{C}_2(t)\cdot x_4(t)+\dot{E}(t)$$
$$\dot{x}_3(t)=f_3(x(t),\theta(t))=\theta_1(t),\quad \dot{x}_4(t)=f_4(x(t),\theta(t))=\theta_2(t) \quad (5)$$

そしてハミルトニアン $H=\sum_{j=0}^{4}p_j(t)\cdot f_j(x(t),\theta(t))$ を導入すると、随伴方程式は以下のようになる。

$$\dot{p}_0(t)=-\frac{\partial H}{\partial x_0}=0\ ,\qquad \dot{p}_1(t)=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=\varepsilon/x_1(t)^2,$$
$$\dot{p}_2(t)=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=0\ ,\qquad \dot{p}_3(t)=-\frac{\partial H}{\partial x_3}=-p_1(t)\cdot\dot{D}_1(t)$$
$$\dot{p}_4(t)=-\frac{\partial H}{\partial x_4}=-p_1(t)\cdot\dot{D}_2(t) \quad (6)$$

ここで　$\mathbb{P}(t)=(P_0(t),P_1(t),P_2(t),P_3(t),P_4(t))$ は補助変数ベクトルであり、$t=T$ で境界条件 $\mathbb{P}(T)=(1,0,0,0,0)$ を満たしている。よって $P_2(t)\equiv 0$，$P_0(t)\equiv 1$ となり、ハミルトニアンHはつぎのようになる。

$$H=\varepsilon/x_1+\sum_{i=1}^{2}\theta_i+P_1\cdot(D_1\cdot\theta_1+D_2\theta_2+\dot{D}_1x_3+\dot{D}_2\cdot x_4+\dot{F})+P_3\cdot\theta_1+P_4\cdot\theta_2 \qquad (7)$$

以上より解法のアルゴリズムはまず $\mathbb{P}(0)$ の値を仮定してつぎの２ステップを繰り返す。

ステップ1　；与件の $\mathbb{X}(t),\mathbb{P}(t)$ を用いて(7)式を最大にするような $\theta(t)=(\theta_1(t),\theta_2(t))$ を求める。

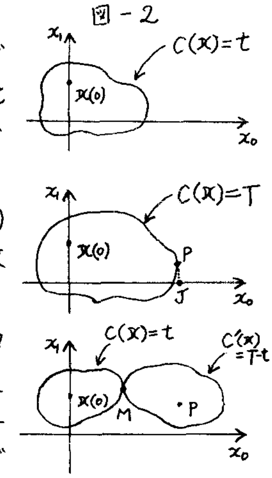
（Hが θ_1,θ_2 に関して線形であるから、(3)式を制約としたLP計算となる。）

ステップ2　；$\mathbb{X}(t),\mathbb{P}(t),\theta(t)$ を(5)(6)両式に代入することにより $\mathbb{X}(t+1),\mathbb{P}(t+1)$ を求める。

そして最後に求まった $\mathbb{P}(T)$ が境界条件を満たすならば、そのときの $\{\theta(t),\ 0\le t\le T\}$ が最適解となり、もし満たさないならば $\mathbb{P}(0)$ を修正して上と同様のことを繰り返せばよいのである。

4．幾何学的考察；　上記アルゴリズムにおいて $\mathbb{P}(0)$ の値を仮定したが、ここで補助変数ベクトル $\mathbb{P}(t)$ の本モデルにおける意味を知る必要がある。一般に本モデルのような制御問題において、初期状態 $\mathbb{X}(0)$ に許容な制御を t 時間作用させると、時刻 t において状態点は１つの集合を形成する。その集合の表面は時刻 t をパラメーターとして、$C(\mathbb{X})=t$ と書ける。$t=T$ とすると $C(\mathbb{X})=T$ が決まるが、この面の中で x_0 の値すなわち評価積分値が最大の点Pが求める最適軌道の終端であり、そのときの x_0 の値Jが最大積分値である。いま終端Pが決まったとして $C(\mathbb{X})=t$ を考えると、そのとき $T-t$ 時間の間に終端Pに到達可能な集合もまた決まるはずであり、その表面を $C'(\mathbb{X})=T-t$ とする。一般にこの２つの面は１点Mで接し、このMの時間的変化が最適軌道である。以上のことを図－２に示した。またこの面 $C(\mathbb{X})=t$ のMにおける法線ベクトル $\left(\frac{\partial C}{\partial x_0},\frac{\partial C}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial C}{\partial x_n}\right)$ が補助変数ベクトル $\mathbb{P}(t)$ の定数倍であることもわかっている。（参考文献4））。さて本モデルにおいては $C(\mathbb{X})$ は初期状態 $\mathbb{X}(0)$ から $\mathbb{X}$ という状態になるまでの最低必要年数を表わしている。そして面 $C(\mathbb{X})=t$ はそこに到るのに最低 t 年間は許容な水資源配分をすることが必要な状態点の集合であり、面 $C'(\mathbb{X})=T-t$ は最適水配分の終端に致るのに最低 $T-t$ 年間は許容な水資源配分をすることが必要な状態点の集合である。この２つの集合の共通点Mが t 年度における最適水配分状態である。

図－2



よってMにおける法線ベクトル $\left(\frac{\partial C}{\partial x_0},\frac{\partial C}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial C}{\partial x_4}\right)$ の意味は、$\frac{\partial C}{\partial x_1}$ を例にとるとつぎのようになる。すなわち、最適水配分途上の t 年度において、他の状態量（評価積分値，水質環境基準点での流量、各地域の利水量）を固定したとき、水質環境基準点での負荷量を１単位増加させるのに最低必要な年数である。同様にして他の成分も意味づけられる。そしてそれぞれの成分の $\frac{\partial C}{\partial x_0}$ に対する比のベクトル、すなわち $\left(1,\frac{\partial C}{\partial x_1}/\frac{\partial C}{\partial x_0},\frac{\partial C}{\partial x_2}/\frac{\partial C}{\partial x_0},\frac{\partial C}{\partial x_3}/\frac{\partial C}{\partial x_0},\frac{\partial C}{\partial x_4}/\frac{\partial C}{\partial x_0}\right)$ が補助変数ベクトル $\mathbb{P}(t)$ である。このような意味づけが、上記アルゴリズムの中の $\mathbb{P}(0)$ の仮定および修正の段階において、非常に有用であったことを付け加えておく。

5．おわりに；　本稿はあくまで参考文献1)の継続として、そのモデルとアルゴリズムの理論的考察をおし進めた。これらの研究により、下水道整備率をパラメーターとして、公共用水域への汚濁インパクトを小さくするという評価のもとに、水資源地域配分の時空間におけるダイナミックスを、定量的かつ幾何学的に明らかにできた。事例および演算結果等は参考文献1)を参照されたい。なお本モデルにおいて $d(W_iA_i)/dt$ を制御変数とすれば負荷量配分モデルとなり、下水道整備率 u_i^c を制御変数とすれば下水道整備計画モデルになることを、最後に付記する。

参考文献；　1)萩原,中川,辻本；水質環境からみた水資源の支流域配分モデルについて、土木学会第30回年講（1975）　2)堤,萩原,中村；下水道整備計画に関するシステム論的研究(I)、第9回衛生工学討論会　3)Dixon；Non Linear Optimization（1972）　4)宇野,菊地、最大原理入門、共立全書（1967）