

京都大学大学院 岡 二三生

1. はじめに

地盤の動的挙動は一般にひずみレベルおよび応力レベルなどに依存しており、非線形性を示す。土のよう  
にひずみレベルが $10^{-4}$ 以下からでも非線形性を示す場合、強震時においては、線形解析  
はその適用限界を越えると考えられる。したがって非線形解析の必要が生じてくる。地盤  
中を伝播する波動は、特に単調な波動については、特性曲線による差分法等によって非線  
形性を導入することが比較的簡単であるが、反射や屈折をくりかえす、調和波解を得ることは  
困難である。近年、非線形性を考慮した地盤モデル中を伝わる調和波解を求める研究  
がなされてきている。<sup>1,2)</sup> S. S. Tegen<sup>2)</sup> らはフォーク型の減衰特性を持ち、剛性がひずみに比例  
して減少するモデルで地盤をモデル化し、摂動法により地盤中の非線形波動をとりあつか  
っている。摂動法により非線形波動の問題を解析する試みは、Davy & Ames<sup>3)</sup> (1973),  
Keller & Kogelman<sup>4)</sup> (1970) や Askar<sup>5)</sup> (1973) らによってなされてきた。本研究においては、摂  
動法により、非線形マクスウェル体中の波動特性を明らかにしようとするものである。計算は  
基層よりSH波が垂直に入射してくる場合をとりあつかった。

2. 波動方程式

構成関係は(1)で表されるものとする。

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \Phi(\sigma, \varepsilon) \frac{\partial \sigma}{\partial t} + g(\sigma, \varepsilon) \quad (1)$$

( $\varepsilon$ ; せん断ひずみ  $\sigma$ ; せん断応力)

$$\Phi(\sigma, \varepsilon) = a + b\sigma^2, \quad g(\sigma, \varepsilon) = c\sigma$$

運動方程式は、

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} \quad (2)$$

$$v \text{ を速度として、} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (3)$$

(1)~(3)より波動方程式は、次式となる。

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = (a + b\sigma^2) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + 2b\sigma \frac{\partial \sigma}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + c \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (4)$$

$\rho$ ; 密度,  $b$ ; 非線形度を表すパラメータ,  $c$ ; 粘性を表すパラメータ

$\Phi = \frac{1}{a + b\sigma^2}$  とおくと、 $\Phi'$  はせん断剛性  $K$  である。(図-1)

$\Phi'$  の変化が小さいと仮定すれば、

$$\alpha = \left| \frac{\Phi'(0) - \Phi'(\sigma_{max})}{\Phi'(0)} \right| \ll 1 \quad (5)$$

$\alpha$  に関して  $\sigma$  を展開すると、

$$\sigma = \sigma_0 + \alpha \sigma_1 + \alpha^2 \sigma_2 + \dots \quad (6)$$

Cole<sup>6)</sup>  $K$  したがって、角速度  $\omega$  に関して  $\omega$  を展開する。

$$\omega = \omega_0 + \alpha \omega_1 + \dots \quad (7)$$

発散する項を解の中から除くために、 $\omega = \omega_0, \omega_1 = 0$  とおく。

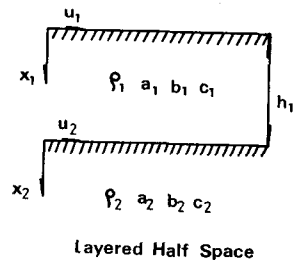
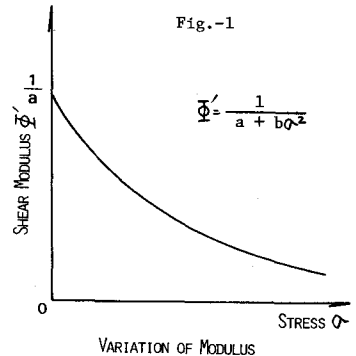


Fig. -2

したがって、0次ならびに1次の項は、

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial x^2} = a \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + c \frac{\partial u_0}{\partial t} \quad (8)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x^2} = a \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + c \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{b}{\alpha} \left\{ \sigma_0^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2\sigma_0 \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 \right\} \quad (9)$$

(8)の線形解は、 $\sigma_0 = (E_0 e^{ikx} + \bar{E}_0 e^{-ikx}) e^{i\omega t}$ ,  $k^2 = \rho(\alpha\omega^2 - c\omega)$  とする。図-2に示す境界条件のもとで解く。

(i)  $\sigma_0(0, t) = 0$  (ii)  $\sigma_0(h, t) = \sigma_0(h, t)$  (iii)  $u_0(h, t) = u_0(0, t)$  (iv)  $u_0(0, t)$  上昇波成分が既知。

非線形解は(9)と(8)より 
$$\sigma_1 = \left[ 3g\omega^2 \left\{ \frac{E_0^3 e^{3ikx}}{(3k-m)(3k+m)} - \frac{\bar{E}_0^3 e^{-3ikx}}{(3k-m)(3k+m)} + \frac{3E_0 \bar{E}_0 e^{ikx}}{(k-m)(k+m)} - \frac{3\bar{E}_0 E_0 e^{-ikx}}{(k-m)(k+m)} \right\} + C e^{imx} + D e^{-imx} \right] e^{3i\omega t} \quad (10)$$

( $m^2 = 3\rho\omega(3\alpha\omega - c)$ ,  $g = b/\alpha$ )

(9)に対応する応力 $\sigma_1$ の関係は  $\sigma_1 e^{i\omega t} = a \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + c \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{b}{\alpha} \sigma_0^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$  であるから、これより1次に関する方程式系が求まる。  $\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = a \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + c \rho \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{b}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_0^2 \frac{\partial u_0}{\partial t})$  (11)

したがってこの、 
$$u_1 = \left[ 3k\omega \frac{b}{\alpha} \left\{ \frac{E_0^3 e^{3ikx} - \bar{E}_0^3 e^{-3ikx}}{(3k-m)(3k+m)} - \frac{E_0 \bar{E}_0 e^{ikx} - \bar{E}_0 E_0 e^{-ikx}}{(k-m)(k+m)} \right\} + C' e^{imx} + D' e^{-imx} \right] e^{3i\omega t} \quad (12)$$

一次の項の境界条件は、(i)  $\sigma_1(0, t) = 0$  (ii)  $\sigma_1(h, t) = \alpha_2 \sigma_2(0, t)$  (iii)  $u_1(h, t) = \alpha_2 u_2(0, t)$  とする。

したがって一次までの解は、 $\sigma = \sigma_0 + \alpha \sigma_1$   $u = u_0 + \alpha u_1$  として求まる。

### 3. 数値計算結果

計算では図-2のような場合を考えた。かつ基層は線形であると仮定した。図-3は表層より10mの深さの応力波形、図-4は表層の速度波形である。定数は  $\rho_1 = 0.24 \times 10^6 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ ,  $C_1 = 0.3 \times 10^5 \text{ (kg/m}^2\text{sec)}$ ,  $b_1 = 45 \times 10^6$ ,  $\rho_2 = 0.14 \times 10^6 \text{ (kg/m}^3\text{)}$ ,  $C_2 = 0.3 \times 10^5 \text{ (kg/m}^2\text{sec)}$ ,  $P_1 = 196.0 \text{ kg/m}^2\text{sec}$ ,  $P_2 = 200 \text{ kg/m}^2\text{sec}$ ,  $h_1 = 20\text{m}$  とした。

図4より非線形の場合の方が振幅が大きいことがわかる。他の計算結果については当日報告あり

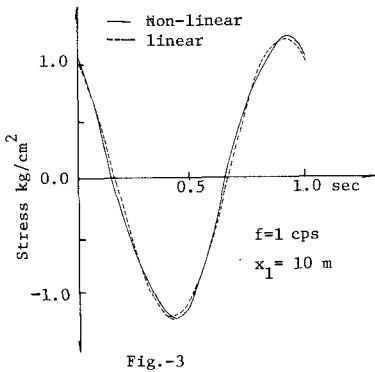


Fig.-3

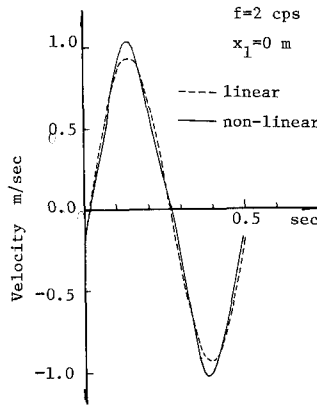


Fig.-4

謝辞 本研究について御指導いただいた赤井浩一教授に感謝いたします。

### 参考文献

1) 土岐 佐藤 "地盤中巨伝播する非線形調和波動" 土木学会論文報告集 No.247, 1976, pp.21~34.

2) Tezcan, S. & H.M. Cekirge "Non-linear Shear Wave Propagation in Layered Half Space". Proc. of Int. Conf. on Computational Methods in Non Linear Mechanics, Ed. by J.T. Oden, 1974, pp. 589-598. 3) Davy, D.T. & Ames, W.H. "An Asymptotic Solution of an Initial Value Problem for a Non linear Visco-elastic Rod" Int. J. Non-linear Mechanics, Vol 8, 1973, pp.59~71. 4) Keller, J.B. & S. Kogelman, "Asymptotic Solutions in initial value problem for non-linear partial differential equations, SIAM. J. Appl. Math. 18, 1970, pp.745~758. 5) Askar, A. "Dispersion Relation and Wave Solution for Anharmonic Lattice and K.D.V. Continua." Proc. Royal. Society, London A 334, 1973, pp. 83~94. 6) Cole, J.D. "Perturbation Methods in Applied Mathematics" New York, Blaisdell, 1968