III-248　粒状体の弾塑性境界値問題に関する有限要素解析

九大　正　橋口公一・東工大　山口柏樹・九大　上野正美

粒状体の力学的諸問題の解析に対して有限要素法を導入する試みが活発になされている。しかし、これらは(非線型)弾性構成式に依拠しており、さらに、これらの弾性構成式に基づく剛性方程式を本質的に塑性変形の生じる大変形過程に対してもそのまま用いており、未だに弾塑性変形過程に対する適切な配慮に基づく妥当な解析法は示されていない。本文では、土のような粒状体に適用しうると思われる簡潔な弾塑性構成式を呈出し、本構成式の導入により、これらの材料の弾塑性変形境界値問題に対する具体的な有限要素解析法を示す。

さて、粒状体の硬・軟化の主因は粒子間ゲキの変化に基づく塑性体積ひずみ $\int d\varepsilon_v^p$ であると考えられる。そこで、降伏条件式は σ_{ij} を応力として次式で与えられると仮定する。

$$f(\sigma_{ij}) - F\left(\int d\varepsilon_v^p\right) = 0 \qquad (1)$$

ところで、$\int d\varepsilon_v^p$ とこれに応ずる等方応力下の降伏平均応力 P_y の間には固有の関係があるが、いま、等方圧縮特性式として

$$\int d\varepsilon_v^p = -\alpha \ln (P_y / P_{y0}) \qquad (2)$$

を仮定し、また、硬化関数 F のサイズを $F = -P_y$ に選べば、式(1)は次のようになる。

$$f(\sigma_{ij}) - f_0 \exp\left(-\int d\varepsilon_v^p / \alpha\right) = 0 \qquad (3)$$

ここに、α は材料定数であり、また、$f_0\ (= -P_{y0})$ は $\int d\varepsilon_v^p = 0$ における $f\ (= -P_y)$ 値である。

他方、負荷関数 f を具体的に次式で与える。

$$f = -(K^2 - 1)\sigma_I \sigma_{III} / (K^2 \sigma_I - \sigma_{III}) \qquad (4)$$

ここに、σ_I および σ_{III} はそれぞれ最大および最小主応力であり、また、K は限界間ゲキ状態 $(d\varepsilon_v^p = 0)$ における主応力比 σ_{III}/σ_I に等しい材料定数である。なお、式(4)は $d\varepsilon_I^p$ および $d\varepsilon_{III}^p$ を σ_I および σ_{III} 方向の塑性ひずみ増分として、入・出力塑性仕事増分比と主応力比 σ_{III}/σ_I の比が定値Kに等しいという力学的特性式(例えば、平面ひずみ状態では $\sigma_{III}\, d\varepsilon_{III}^p / (-\sigma_I\, d\varepsilon_I^p) = K$)に normality condition を適用して導びかれた負荷関数である。

さて、式(3)に式(4)を採用した具体的な降伏条件式に normality condition を用いれば、$d\varepsilon_I^p$, $d\varepsilon_{II}^p$ (中間主応力 σ_{II} 方向の塑性ひずみ増分) および $d\varepsilon_{III}^p$ は以下のように与えられる。

i) 面上　$\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$

$\chi \neq 0$: $d\varepsilon_I^p = \Lambda G_I$, $d\varepsilon_{II}^p = 0$, $d\varepsilon_{III}^p = \Lambda G_{III}$

$\chi = 0$: $d\varepsilon_I^p = \lambda$, $d\varepsilon_{II}^p = 0$, $d\varepsilon_{III}^p = -\lambda$

ii) 稜上 (軸対称応力状態)

伸張 $\sigma_I > \sigma_{II} = \sigma_{III}$:

$\chi \neq 0$: $d\varepsilon_I^p = \Lambda G_I$, $d\varepsilon_{II}^p = \frac{1}{2}(1 - \sin\psi)\Lambda G_{III}$, $d\varepsilon_{III}^p = \frac{1}{2}(1 + \sin\psi)\Lambda G_{III}$

$\chi = 0$: $d\varepsilon_I^p = \mu + \varepsilon$, $d\varepsilon_{II}^p = -\mu$, $d\varepsilon_{III}^p = -\varepsilon$

圧縮 $\sigma_I = \sigma_{II} > \sigma_{III}$:

$\chi \neq 0$: $d\varepsilon_I^p = \frac{1}{2}(1 + \sin\varphi)\Lambda G_I$, $d\varepsilon_{II}^p = \frac{1}{2}(1 - \sin\varphi)\Lambda G_I$, $d\varepsilon_{III}^p = \Lambda G_{III}$

$\chi = 0$: $d\varepsilon_I^p = \lambda$, $d\varepsilon_{II}^p = \xi$, $d\varepsilon_{III}^p = -\nu - \xi$

iii) 尖点 (等方応力状態) $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$

$d\varepsilon_I^p = \frac{1}{2}\Lambda(\chi - A\sin\alpha)$, $d\varepsilon_{II}^p = \frac{1}{2}\Lambda(\chi - A\sin\beta)$, $d\varepsilon_{III}^p = \frac{1}{2}\Lambda(\chi - A\sin\gamma)$　(5)

ここに

$$
\left.\begin{array}{l} G_I = \partial f / \partial \sigma_I , \quad G_{II} = \partial f / \partial \sigma_{II} , \quad \chi = G_I + G_{II} , \quad A = G_I - G_{II} \\ \Lambda = -\alpha df / (f \cdot \chi) , \quad \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = -\chi / A \end{array}\right\} \tag{6}
$$

なお、$\chi = 0$ は限界間ゲキ状態に相当し、ε，γ および ξ は本状態における塑性ひずみ増分の大きさおよび方向を指定する正値のスカラー変数である。また、ψ，φ，α，β および γ は負荷面の非正則部分における塑性ひずみ増分の主に方向に関連する変数である。

また、弾性構成式については、まず、等方圧縮特性式として、次式を仮定する。

$$
\int d\varepsilon_v^e = -\frac{1}{3} \ln\{ (P_r - P) / (P_r - P_0) \} \tag{7}
$$

ここに、$d\varepsilon_v^e$ は弾性体積ひずみ増分，P_0 は $\int d\varepsilon_v^e = 0$ における P 値であり、また、P_0 および P_r は材料定数である。なお、式(2) および(7)は従来の e（間ゲキ比）― $\ln(-P)$ 線型関係を対数ひずみの概念に呼応し、かつ、負圧 $P \geqq 0$ にまで適用しうるように拡張したものである。

他方，弾性偏差ひずみ特性が Hooke 則 に従うと仮定すれば、結局、弾性構成式は次式で与えられる。

$$
d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{3}\beta \frac{dP}{P_r - P} \delta_{ij} + \frac{1}{G} d\sigma_{ij}' \tag{8}
$$

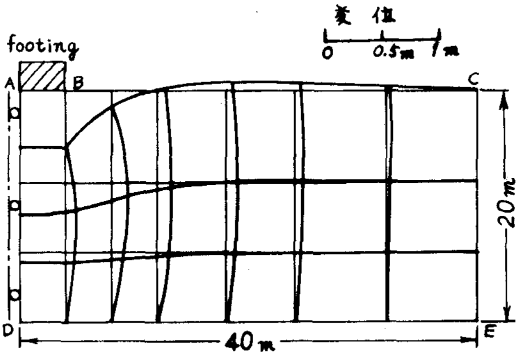
ここに、$\sigma_{ij}' = \sigma_{ij} - P\delta_{ij}$ であり、また、G はせん断弾性係数である。

以上の構成式を用いて、Y. Yamada（1968）により提案された

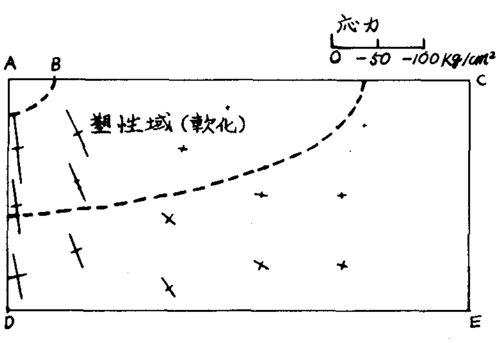
$$
[D] = [D^e] - \frac{[D^e]\{\partial f/\partial\sigma\}\{\partial f/\partial\sigma\}^T[D^e]}{h\cdot dF/dH + \{\partial f/\partial\sigma\}^T[D^e]\{\partial f/\partial\sigma\}} \tag{9}
$$

の形式の剛性マトリクスを定式化した。ここに、$[D^e]$は弾性構成マトリクス（$\{d\varepsilon^e\} = [D^e]^{-1}\{d\sigma\}$）であり、$H$ は硬化パラメータ，また，h は $h = dH/\Lambda$ を満たし、パラメータ $\partial f/\partial\sigma$ で表わされた関数である。

さらに、これにより、平面ひずみ条件下の荷重―沈下問題の解析を行なったが、1例（豊浦砂，初期間ゲキ比；0.83）を図―1～2 に示す。当材料の降伏圧力は非常に高く硬化状態は生じていないが、軟化状態としての塑性域の発達が見られる（図―2）。なお、軟化状態では、応力増分による負荷基準は成立しえないので、応力増分ではなく変位増分を与えた。



図―1　変位状態



図―2　主応力状態

材料定数（豊浦砂，$e_0 = 0.83$）

$K = 3.3$，　$P_{y0} = -150\ Kg/cm^2$

$\alpha = 0.1$，$\beta = 0.032$，$P_r = 99\ Kg/cm^2$

$G = 1000\ Kg/cm^2$