

山梨大学 工学部 正員 平嶋 健一
山梨大学 工学部 正員 照山 修

1. まえがき

物体内に空洞ないし、クラックを有する弾塑性体の応力、変形の解析は、地山内の坑道周辺、応力測定など、地山を対象とする構造物の設計資料を得るための不可欠の条件の一つであり、また応力(ひずみ)集中論に立脚した材料の破壊に対する強度評価にとっても重要である。この種の弾塑性問題は、大別して面内荷重問題と面外荷重問題とに分けることができ、面内荷重問題については、Budiansky & Mangasarian¹⁾、Idung²⁾の他によって広く研究され、これらの論文では、Ramberg-Osgood型³⁾構成関係を仮定し、 J_2 変形理論を適用している。他方、面外荷重問題では、中山³⁾、Wellner & Tuba⁴⁾などにより研究がなされているが、前者は、物体を完全弾塑性体と仮定して面外せん断荷重を受ける場合の楕円孔、あるいは近似正方形孔周辺の弾塑性応力状態を複素変数法と Tresca の降伏条件を用いて塑性域の広がりについて研究を行ない、Wellner & Tuba では、同様の荷重状態での円孔周辺の応力状態を Ramberg-Osgood 型の物体に対して、振動法を応用して解いているが、面内問題に比べて比較的現実の研究が少ない。例えば、Wellner & Tuba の解析においては、作用荷重の小さい段階では、ある程度有効ではあるが作用荷重が大きくなると、事実上適用できないという難点を含んでいる。本文では、面外せん断荷重が作用する場合の弾塑性体内、円孔周辺の応力、変形について、Idung と同様に、Ramberg-Osgood 型の構成関係を仮定し、 J_2 変形理論を適用して非線型基礎方程式を誘導し、これを級数展開法と差分法によって数値計算を行ない、上述した面外弾塑性問題の従来の難点を取り除くことを試みたいものである。

2. 問題の設定および基礎方程式

Fig.1 に示すように、奥行方向に一定断面、円孔を有し、この円孔半径より充分離れた位置から、面外(縦)せん断応力が作用するような弾塑性媒体を考える。図に示す直交デカルト座標系のもとで、面外せん断荷重に対する応力、変位成分は、一般に次式で与えられる。⁵⁾

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \quad u = v = 0 \quad w = w(x, y) \quad \dots \dots \dots (1)$$

残りの応力成分 τ_{xz} および τ_{yz} だけが存在する。

Ramberg & Osgood は一軸応力-ひずみ曲線を Fig.2 に示したような構成関係を提案しているが、本文ではこれを相当応力、相当ひずみの関係として使用する。また、塑性解析において、全変形理論と von Mises の降伏基準に基づけば、一般に以下の関係式が成立する。

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E} \right) S_{ij} \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$\frac{1}{E_s} = \frac{1}{E} \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{\hat{\sigma}}{\sigma_s} \right)^{n-1} \right]$$

ここに、 ν : ポアソン比 δ_{ij} : クロネッカー・デルタ記号

S_{ij} : 偏差応力 E_s : 構成関係における割係数

$\hat{\sigma}$: 相当応力 ここで $\hat{\sigma} = \sqrt{3}(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)^{1/2}$

面外せん断荷重を受ける等方、等質媒体を考え、物体力を無視し

温度一定である場合の基礎方程式を問題に適するように円柱座標系 (r, θ, z) で定式化する。応力関数を導入して応力成分を表わすと次のようになる。

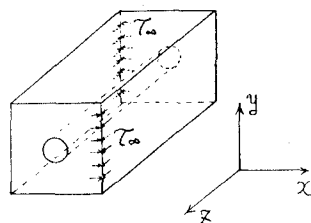


Fig.1

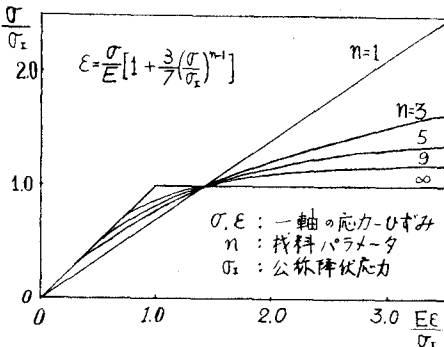


Fig.2

$$\tau_{rz} = r^{-1} \tau' \quad \tau_{\theta z} = -\tau' \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$\text{ここに, } (') = \partial/\partial r, \quad (')' = \partial/\partial \theta$$

一方、以下に示すような、無次元化した量を導入する。

$$\left. \begin{aligned} S_{\theta z} &= \frac{\tau_{\theta z}}{\tau_a} & S_{rz} &= \frac{\tau_{rz}}{\tau_a} & \delta &= \frac{\sigma}{\tau_a} & \lambda &= \frac{\tau_a}{G} \\ p &= \frac{3}{2} \lambda^{-1} & \chi &= \frac{a}{r} & F &= \chi \frac{\sigma}{\tau_a} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

ここに、 τ_a : 無限遠より作用する面外せん断荷重
 a : 円孔半径 以上より、修正応力関数 F を用いて、応力、ひずみ、ならびに本問題の支配方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} S_{rz} &= F' & S_{\theta z} &= \chi F' - F \\ \varepsilon_{\theta z} &= \tau_a (1+\nu)(\chi F' - F)/E + 3\tau_a p \delta^{**} (\chi F' - F)/2E \\ \varepsilon_{rz} &= \tau_a (1+\nu)F/E + 3\tau_a p \delta^{**} F/2E \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} (1+\nu) \frac{3}{2} p \delta^{**} (\chi F' + F - \chi F' + F) + \frac{3}{2} p (\delta^{**})' (\chi^2 F' - \chi F) \\ + \frac{3}{2} p (\delta^{**}) F = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

3. 数値計算結果

Fig. 2 の $\eta=3$ に相当する場合についていくつかの代表的な λ をとりあげ数値解析を行なった。応力関数をフーリエ級数に展開し、これにより変数分離されたフーリエ係数を差分方程式に置き換え、これを Newton 法により反復計算をして収束解を導いた。最初に、小さな λ に対して、応力集中係数 K を本解析と Wellner & Tuba とで比較をしたものが Table 1 である。Fig. 3(a)(b) は、完全弾性体、場合と $\lambda=1.0$ の場合の円孔付近、領域で、相当応力分布をそれぞれ図示したものである。Fig. 4 は、 λ をパラメータとして、 $\tau_{xz}=1.0$ 、 $\tau_{yz}=0.0$ の荷重状態で最大応力 $(\frac{\tau_{\theta\theta}}{\tau_a})_{\theta=\pi/2}$ を半径方向にたいしてプロットしたものである。Fig. 5、Fig. 6 は、 $\tau_{xz}=1.0$ 、 $\tau_{yz}=0.0$ と $\tau_{xz}=1.0$ 、 $\tau_{yz}=1.0$ のときの孔縁上の $\tau_{\theta z}/\tau_a$ をそれぞれ示している。

4. おわりに

以上、面外せん断荷重下での円孔周辺部、弾塑性応力状態を変形理論を適用して差分法により解析した結果の一例を示したが、計算結果の精度、および材料パラメータ η が変化した場合の例、等について、講演会当日に発表する。

参考文献

- 1) Bernard Budiansky & O.L. Mungasarian J. Applied Mechanics, march 1960 pp 59-64
- 2) Wu-chang Chung, Int. J. Solids Structures vol. 8, 1972, pp 149-192
- 3) 中山孝之 博学会論文集 33巻 246号(昭42.2) pp 169/175 252号(昭42.8) pp 1175-1182
- 4) K.V. Wellner & I.S. Tuba J. Structures, vol. 4, No I, (1969) pp 40-44
- 5) K. Hirashima, 土木学会論文報告集 No 220 (1973) pp. 131-141

Table 1

	λ	K	
		本解析	Wellner & Tuba
$\eta=3$	0.2	-1.835	-1.93
	0.5	-1.751	-1.84

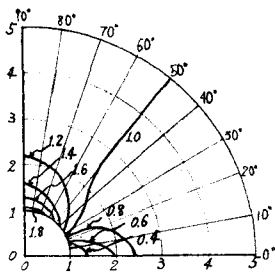


Fig. 3 (a)

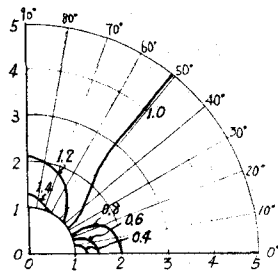


Fig. 3 (b)

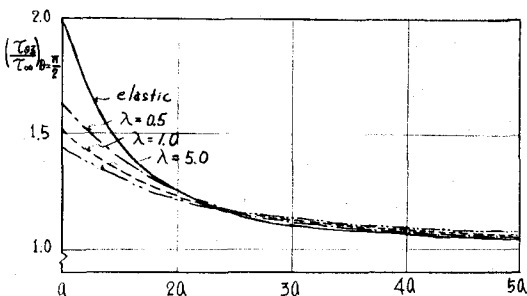


Fig. 4

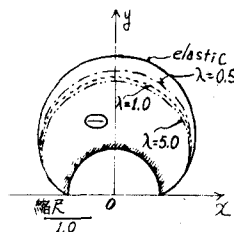


Fig. 5

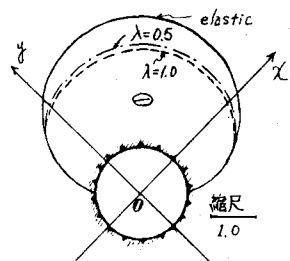


Fig. 6