III-241　還元有限要素法によるトンネル湧水の二次元定常解析

九州大学工学部　正会員　樗木　武
九州大学工学部　学生員　楊　勲得
建　設　省　正会員 ○松隈宣明

1．まえがき　トンネル湧水問題の数値解析としてFEM解析を用いることができるが[1,2]、本法の直接的適用では演算量が膨大になり、また、流量算出にばらつきが生ずるなどの難点がある。そこで、本研究では、これらの難点を排除し、効果的なFEMの活用をはかる目的から、還元法[3]の概念を導入するものである。すなわち、FEMの基礎式から、還元解析のための基礎式を誘導し、活用する。また、自由水面を有する不圧湧水では、湧出点の推定が問題になるが、従来のように特に湧出点およびその近傍で細かな要素分割をせずとも、精度の高い湧出点が推定できる新たな手法を提案し、還元有限要素法の有用性向上に資するものである。

2．還元有限要素法の基礎式

A．ブロック分割と要素分割

本法では、解析上の原理から、解析対象領域の要素分割を次のように行う。すなわち、湧水問題では、相対する２つの境界が固定条件で、いま一つの相対する２つの境界条件が自由条件で与えられるが、分割に際しては、まず両固定条件間をブロック分割する。Fig.1はその例を示すものであるが、線分1−1′，2−2′…がブロック分割線を示すものである。ついで、帯状のブロックを三角形または四辺形要素に分割するが、このとき、各ブロック線上の節点数が互いに一致するようにする。

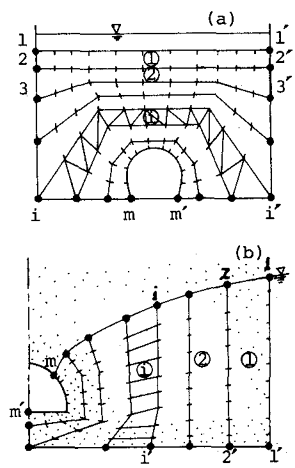

Fig.1

B．格間式・伝達式

２つのブロック線ではさまれるブロック $i-1$ を取り出せばFig.2に示すとおりである。両ブロック側面上の節点番号を下端から1,2,…,n と付し、これらの節点のポテンシャルおよび節点流量で構成される列ベクトルを $(\mathbf{H}_{(i-1)i}, \mathbf{Q}_{(i-1)i})$，$(\mathbf{H}_{i(i-1)}, \mathbf{Q}_{i(i-1)})$ と記号表示する。このとき、ブロック $i-1$ を適当に三角形または四辺形要素に分割のうえ、FEMの基本式たる各要素の定常流浸透性方程式を求め集積すれば、次式がえられる。

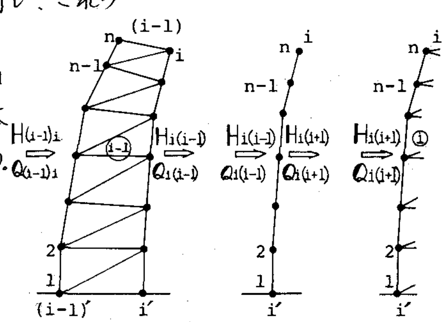

Fig.2

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_{(i-1)i} \\ -\mathbf{Q}_{i(i-1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{(i-1)(i-1)} & \mathbf{k}_{(i-1)i} \\ \mathbf{k}_{i(i-1)} & \mathbf{k}_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{H}_{(i-1)i} \\ \mathbf{H}_{i(i-1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_{(i-1)i} \\ \mathbf{R}_{i(i-1)} \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

ここに、$[\mathbf{k}]$；浸透性マトリックス，$\mathbf{R}$；節点における等価発生・吸収流量

ここで、$\mathbf{V}^T=[H^T\ Q^T]$ なる状態ベクトルを定義のうえ、式(1)を変形すれば、若干の演算ののち、次式がえられる。

$$\mathbf{V}_{i(i-1)} = \boldsymbol{\Gamma}_{(i-1)i}\ \mathbf{V}_{(i-1)i} + \mathbf{V}_{(i-1)0} \qquad (2)$$

ここに、

$$\mathbf{V}_{(i-1)0} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^{-1}_{(i-1)i} & {}_n\mathbf{O}_n \\ -\mathbf{k}_{ii}\mathbf{k}^{-1}_{(i-1)i} & -{}_n\mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\mathbf{R}_{(i-1)i} \\ \mathbf{R}_{i(i-1)} \end{Bmatrix},\quad \boldsymbol{\Gamma}_{(i-1)i} = \begin{bmatrix} -\mathbf{k}^{-1}_{(i-1)i}\mathbf{k}_{(i-1)(i-1)} & \mathbf{k}^{-1}_{(i-1)i} \\ \mathbf{k}_{ii}\mathbf{k}^{-1}_{(i-1)i}\mathbf{k}_{(i-1)(i-1)}-\mathbf{k}_{i(i-1)} & -\mathbf{k}_{ii}\mathbf{k}^{-1}_{(i-1)i} \end{bmatrix}$$

式(2)はブロック $(i-1)$ において、ブロック線 $(i-1)-(i-1)'$，$i-i'$ 側両側面の状態ベクトル $\mathbf{V}_{(i-1)i}$，$\mathbf{V}_{i(i-1)}$ 相互の関係を与える格間式であり、$\boldsymbol{\Gamma}_{(i-1)i}$ は格間マトリックスである。

つぎに、ブロック $(i-1)$ とブロック i 間のブロック線 $i-i'$ に着目し、両ブロックから伝えられるポテンシャルの連続性および、流出入量に関する水収支を考慮すれば、$\mathbf{V}_{i(i-1)} = \mathbf{V}_{i(i+1)}$ なる関係式が成立する。本式に式(2)を代入すれば次式がえられ、本題の伝達式になる。

$$\mathbf{V}_{i(l+1)} = \Gamma_{(l-1)i}\ \mathbf{V}_{(l-1)i} + \mathbf{V}_{(l-1)0} \qquad (3)$$

C．境界条件

ブロック線1-1′, m-m′（Fig.1参照）の両境界における境界条件は次のように与えられる。

(1) ブロック線 1-1′の境界条件式

・ポテンシャル既知の場合：　H_L；ブロック線1-1′上の既知ポテンシャルベクトル

$$\mathbf{V}_{12} = \mathbf{B}_{LH}\begin{Bmatrix} Q_{12} \\ 1 \end{Bmatrix},\ ここに\quad \mathbf{B}_{LH} = \begin{bmatrix} {}_n\mathbf{0}_n & H_L \\ {}_n\mathbf{I}_n & {}_n\mathbf{0}_1 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

・流量既知の場合：　Q_L；ブロック線1-1′上の既知流量ベクトル

$$\mathbf{V}_{12} = \mathbf{B}_{LQ}\begin{Bmatrix} H_{12} \\ 1 \end{Bmatrix},\ ここに\quad \mathbf{B}_{LQ} = \begin{bmatrix} {}_n\mathbf{I}_n & {}_n\mathbf{0}_1 \\ {}_n\mathbf{0}_n & Q_L \end{bmatrix} \qquad (4)$$

(2) ブロック線 m-m′の境界条件式

・ポテンシャル既知の場合：　H_R；ブロック線m-m′上の既知ポテンシャルベクトル

$$\mathbf{B}_{RH}\mathbf{V}_{m(m-1)} = H_R \quad ここに\quad \mathbf{B}_{RH} = \left[{}_n\mathbf{I}_n\ \ {}_n\mathbf{0}_n\right] \qquad (5)$$

・流量既知の場合：　Q_R；ブロック線m-m′上の既知流量

$$\mathbf{B}_{RQ}\mathbf{V}_{m(m-1)} = Q_R \quad ここに\quad \mathbf{B}_{RQ} = \left[{}_n\mathbf{0}_n\ \ {}_n\mathbf{I}_n\right] \qquad (5)'$$

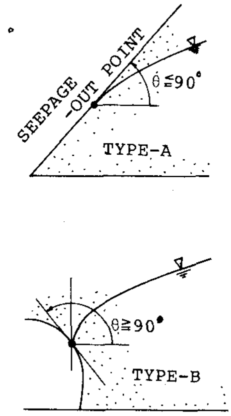

Fig.3

3．湧出点推定法

湧水点はFig.3に示すように2つのタイプに分けられる。Type-Aは湧出点を生ずる斜面の傾斜が$\theta \leqq 90°$の場合で、自由水面は湧出点において斜面に接する。Type-Bは$\theta \geqq 90°$の場合で、自由水面が湧出点において鉛直になる。これらの性質と、湧出点近傍の自由水面形を擬似放物線で近似できるとの考えに立って浸出点を推定するものである。

各タイプに対する推定原理はFig.4,5に示すとおりであるが、その詳細は紙面の都合上割愛し、結果のみ示せば次のとおりである（推定湧出点の座標値をx_I, h_Iとする）。

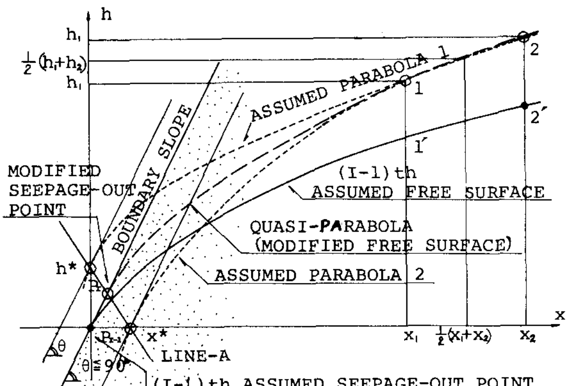

Fig.4

Type－A；（$\theta \leqq 90°$）

$$x_I = h^* \Big/ \left(\frac{h^*}{x^*} + \tan\theta\right),\quad h_I = h^*\tan\theta \Big/ \left(\frac{h^*}{x^*} + \tan\theta\right) \qquad (6)$$

ここに $h^* = h_1 - 2\sqrt{x_0}\left(\sqrt{x_1+x_0} - \sqrt{x_0}\right)\tan\theta$, $x^* = x_1 - (h_1 + 2h_0)h_1\cot\theta/(2h_0)$

$$h_0 = \frac{(h_1+h_2)/2}{\{(x_2-x_1)/(h_2-h_1)\}\tan\theta - 1},\quad x_0 = \frac{(x_1+x_2)/2}{\{(x_2-x_1)/(h_2-h_1)\}^2\tan^2\theta - 1}.$$

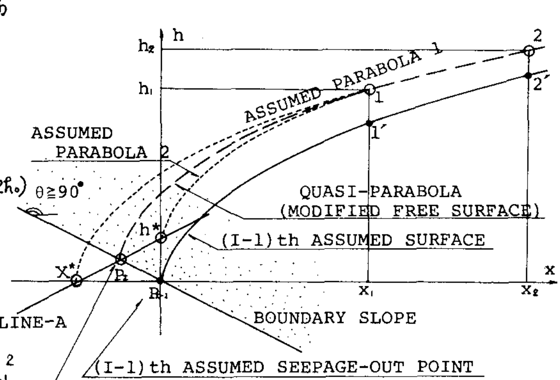

Fig.5

Type－B；（$\theta \geqq 90°$）

$$x_I = h_0 \Big/ \left(\frac{h_0}{x_0} + \tan\theta\right),\quad h_I = h_0\tan\theta\left(\frac{h_0}{x_0} + \tan\theta\right) \qquad (7)$$

ここに $$h_0 = \frac{\sqrt{x_2}\,h_1 - \sqrt{x_1}\,h_2}{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}},\qquad x_0 = \frac{x_1 h_2^2 - x_2 h_1^2}{h_2^2 - h_1^2}$$

本法を用いてトンネル湧水の定常解析を行い、興味ある結果がえられたが、それらについては講演時に発表する。

参考文献　1). Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, London, 1971, PP.295~317　2). Neuman, S.P. and P.A. Witherpoon; Finite Element Method of Analyging Steady Seepage with a Free Surface, Water Res. Research, Vol.6, No.3, 1970, PP.889-897.　3) 穂木武；マトリックス構造解析法，丸善出版，1972, PP.347-418