III-228　Bayes決定理論による最適土質調査規模

京都大学工学部　正　浅岡 顕
名古屋大工学部　正　松尾 稔
京都大学工学部　正　黒田 勝彦

1　はじめに

土の設計では，個々の地盤の特殊性が大きいため，現場ごとに最適な土質調査規模は変化しうる。この調査規模の合理的な決定法を定式化する。もちろん，土質調査の規模決定には，ここで述べる手法の適用の以前に，大局的な地質学的判断や，その地盤における過去の工事例にもとづく判断が優先することは当然である。また，土の問題では，施工中の観測によって，設計変更を行なうことが多い。このような場合には，施工前に得られた土質調査結果と，施工中の観測結果との両者の合理的な利用法が問題となる。この問題もここでは触れない。

2　損失関数

土質調査によってもたらされる情報の不確実性を評価するための損失関数（Loss fn.）を以下のように定義する。

$$L(\theta, a) = v(C_c) \times (1 - P_F) + v(C_F) \times P_F \qquad (1)$$

ここに C_c は建設費用，C_F は破壊時の費用であり，ともに設計行動 a の関数である。また P_F は破壊確率であり，地盤の真の状態 θ と設計行動 a との関数である。関数 $v(\cdot)$ は選好指標であり，費用の増加関数である。(1)は土質調査のための費用を含んでいない。簡単のため $v(\cdot)$ を費用の線形関数と仮定すれば，土質調査によって得られる n コの標本の費用 $c \times n$ が，(1)につけ加わる。今後これを $L_n(\theta, a)$ で表わす。$L_n(\theta, a) > L_{n-1}(\theta, a)$ である。

3　最適土質調査規模の非逐次的決定

まとまった調査個数を事前に一括して指定し，その調査結果をみて再度の土質調査はせず，直ちに設計行動 a をきめる問題を考える。（このような例としては文献1を参照）　θ の事前分布を $\xi(\theta)$，n コの標本 X_n の実現値 x_n から，尤度関数 $u(x_n|\theta)$，事後分布 $\xi(\theta|x_n)$，x_n の周辺分布 $g(x_n)$ が計算できるものとする。この問題では，x_n を見るまではいかなる行動 a も下す必要はないから，決定は x_n の関数 $a(x_n)$ と書くことができる。$a(x_n)$ なる決定関数を採用するリスクは，

$$R_n(\theta, a(\cdot)) = \int u(x_n|\theta) L_n(\theta, a(x_n))\, dx_n \qquad (2)$$

であり，$R_n(\theta, a(\cdot))$ の $\xi(\theta)$ による平均（Bayes risk）は，

$$r_n(\xi(\cdot), a(\cdot)) = \int g(x_n) \int \xi(\theta|x_n) L_n(\theta, a(x_n))\, d\theta\, dx_n \qquad (3)$$

となるから，x_n のもとでの最適行動 $a^*(x_n)$ は

$$\min_{a(x_n)} \int \xi(\theta|x_n) L_n(\theta, a(x_n))\, d\theta \qquad (4)$$

によって求められる。この $a^*(x_n)$ による Bayes risk を最小にする n を求めれば，これが求める最適土質調査規模となる。すなわち

$$r_{n^*}(\xi, a^*) = \min_{n \geq 0} r_n(\xi, a^*) \qquad (5)$$

$r_n(\xi, a^*(\cdot))$ の n にともなう増減は以下のようにして調べられる。L_n に対する残念関数を $reg_n(\theta, a(\cdot))$.

$$reg_n(\theta, a(\cdot)) = L_n(\theta, a(\cdot)) - \min_{a} L_n(\theta, a(\cdot)) \quad \text{for all } x_n \qquad (6)$$

と書けば，これは非負関数で，すべての a によって作られる $reg_n(\theta, a)$ の集合（の凸包）は，θ を座標軸にとれば，全ての θ 軸に接している。$n \to \infty$ のとき $\xi(\theta|X_n)$ は確率1でひとつの θ の値を指定するから，結局，

$reg_n(\theta, a(\cdot))$を $L_n(\theta, a(\cdot))$ のかわりに用いた Bayes risk の最小値

$$B_n(\xi, a^*(\cdot)) = \int g(x_n) \int \xi(\theta | x_n)\, reg_n(\theta, a^*(x_n))\, d\theta\, dx_n \qquad (7)$$

は，　$B_n \geq 0$,　$\lim_{n \to \infty} B_n = 0$　となる。((7)と(5)とが同じ $a^*(\cdot)$をとることは，(6)の才2項が関数aに依存しないことからあきらか)　ところが，

$$r_n(\xi, a^*(\cdot)) = B_n(\xi, a^*(\cdot)) + \int \xi(\theta) L_n(\theta, a^*(\theta))\, d\theta \qquad (8)$$

となり，この右辺才2項は，損失関数の定義にしたがい n の増加関数。以上より，$r_n(\xi, a^*(\cdot))$ の n にともなう増減は，図1のように描かれる。

4　最適土質調査規模の逐次的決定

3　の冒頭で述べた仮定をはずして，ある単位個数Δの土質調査結果をみて，さらにひきつづき土質調査をつづけるか，もう調査は打ち切って最適設計行動をきめるかの判定を逐次的に行なう問題を考える。

X_n の実現値 x_n をすでに見てしまって，さらにこれとは独立な追加情報 X_m を得ようとしているときの最適行動 $a^*(\cdot)$ の決定問題は，3における諸関数を

$$\begin{aligned}
\xi(\theta) &\longrightarrow \xi(\theta | x_n) \\
u(x_n | \theta) &\longrightarrow u(x_n, x_m | \theta) \\
g(x_n) &\longrightarrow \int u(x_n, x_m | \theta)\, \xi(\theta | x_n)\, d\theta = g(x_n, x_m) \\
\xi(\theta | x_n) &\longrightarrow u(x_n, x_m | \theta)\, \xi(\theta | x_n) \,/\, g(x_n, x_m) = \xi(\theta | x_n, x_m) \\
L_n &\longrightarrow L_{n+m}
\end{aligned}$$

におきかえて得られる。このときの最適調査規模 n^{**} は，図2の flow chart による実験(sampling)と演算によって求められる。この逐次決定過程の総 Bayes risk を(形式的だが)求めておく。

$$r_{i\Delta} \leq r_{(i+1)\times\Delta}$$

となる $\xi(\cdot | x_{i\times\Delta})$ の集合を Ξ_i で表わす($i=0$ のときはΞ)。　$\xi(\cdot) \notin \Xi$ であり，逐次的に収集される情報の系列 $\{x_\Delta, x_\Delta', \cdots\}$ に対して　$\xi(\cdot | x_{\Delta\times i}) \notin \Xi_i$　であり，$i+1$回目にはじめて $\xi(\theta | x_{(i+1)\Delta}) \in \Xi_{i+1}$ となるような，独立な情報の系列の集合を W_i と書く。このとき，

$$R(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{W_i} L_{i\times\Delta}(\theta, a(x_{i\times\Delta}))\, u(x_{i\times\Delta} | \theta)\, dx_{i\times\Delta} \qquad (9)$$

とすれば，逐次決定過程の総 Bayes risk は，

$$r(\xi) = \int \xi(\theta) R(\theta)\, d\theta \qquad (10)$$

によって求められる。n^{**} は，標本の系列 $\{X_\Delta, X_\Delta', \cdots\}$ に依存する確率変数であるから，3で述べた n^* との比較は直接行なうことはできない。盛土の法面勾配の決定問題を例にとった設計に対する，最適土質調査規模 n^{**} のモンテカルロ・シミュレーションによる計算結果や，同手法による(10)の値の計算値と(5)との比較は，紙面の都合上，講演時に発表する。

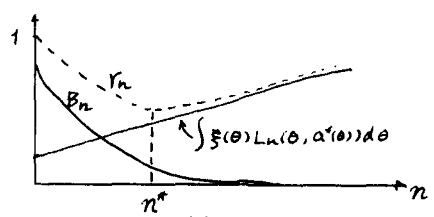

図 1

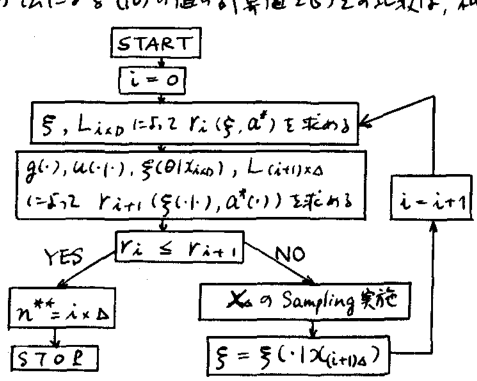

図 2

5　参考文献

1)　松尾・浅岡(1974)「沈下予測に関する統計的考察」，土木学会論文集 No. 225