

広島大学 正 吉 国 洋
東北地建 時 板 繁

1. まえがき

Gibson¹⁾らは有限地盤の帯基礎の問題に対して、Biotの方程式に初めて厳密解を与えた。しかし、彼らの解は奇異なもので、載荷中 B を無限に大きくしてもその圧密過程が一次元圧密のそれに一致せず、一次元に比して2倍以上圧密過程が遅れるというものであった。山口²⁾はこの点を指摘し、Gibsonの解の信憑性を懸念し、自らも別途の解法でこの問題に厳密解を与えた。しかし当初任意な境界条件のもとでは解き得ず、地盤表面の水平変位を零に拘束して解(第1図中の山口(1))を求めた。²⁾この解が熱伝導型の方程式の解と一致することは理論的に証明されている。³⁾その後、山口⁴⁾は地盤表面の拘束を取り除き、Gibsonと同じ、上下端面滑らかという境界条件のもとで解(山口(2))を求めた。山口⁴⁾は荷重中と粘土層厚の比 B/H が4以下の解しか求めていないが、 B/H の増加に伴って、一次元圧密の過程に漸近すると推定した。そこで吉国はこの問題を確かめるためにF.E.M.による近似解(吉国(1))を求めた。そして吉国は B/H の増加と共に帯基礎の圧密過程は一次元のそれに漸近する傾向を得、Gibsonの解に対する山口⁴⁾の指摘に同調する意見を發表した。⁵⁾しかし、その後の検討において、Gibson¹⁾の解の数学的当否を評価することはできないけれど、上下端面滑らかという境界条件のもとにおける圧密過程はGibsonの解的傾向を示すべきであること、 B/H の増加と共に一次元圧密に漸近しないのは上下端面滑らかな境界条件に原因することを理論的に確認した。したがって今回の報告は参考文献で述べた同調意見の訂正と境界条件が圧密過程に与える影響を検討したものである。

2. 上下端面滑らかな境界条件のもとにおける帯基礎の圧密過程

上下端面滑らかな境界条件のもとでは、力の釣合いから

$$\int_0^H \sigma_x dz = 0 \quad \dots (1) \quad \int_0^H \sigma_z dx = B \cdot p \quad \dots (2)$$

そこで、圧密ポテンシャル φ は、

$$\varphi = (\lambda + 2\mu)e + u \quad \dots (3)$$

であり、 $E_y = 0$ を考へるなら、 φ は次の形に書くことができる。

$$\varphi = \sigma_z + 2\mu E_x \quad \dots (4)$$

$$\varphi = (1-\nu)(\sigma_x + \sigma_z) - (1-2\nu)u \quad \dots (5)$$

今、任意の深さ z で(4)式の積分を行う。

$$\begin{aligned} \int_0^H \varphi dx &= \int_0^H \sigma_z dx + 2\mu \int_0^H E_x dx \\ &= Bp - 2\mu u_x(x=\infty) \quad \dots (6) \end{aligned}$$

また、 $x \gg B$ で u_x は深さ方向に一定であるから、次の関係が成立する。

$$\int_0^H \varphi dx = \frac{1}{H} \int_0^H \int_0^H \varphi dx dz \quad \dots (7)$$

上式右辺に(5)式を代入し、 $t \rightarrow \infty$ の時 $u=0$ であることおよび(1)式(2)式の関係を考えたと

$$\int_0^H \varphi(t=\infty) dx = (1-\nu)Bp \quad \dots (8)$$

一方、 $t=0$ で $e=0$ であるから、(3)式は

$$\sigma_i = \sigma'_i + u \quad (i=x, z)$$

$$e = E_x + E_y + E_z$$

$$E_x = -\frac{\partial u_x}{\partial x}$$

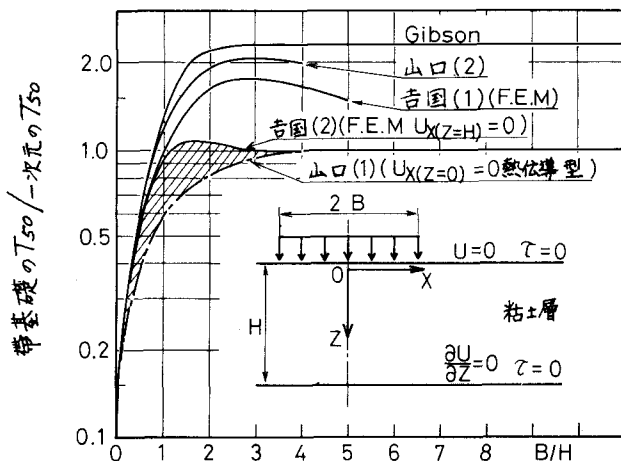
λ, μ : Laméの定数

ν : Poisson比

u_x : x 方向の変位

u : 間隙水圧

第1図 載荷中心の沈下速度と載荷中 ($\nu=0$)



$$\varphi(t=0) = u(t=0) = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z)(t=0) \quad \dots\dots (9)$$

となる。そして(9)式を(7)式の関係に入れて(1)式(2)式を考えるならば

$$\int_0^\infty \varphi(t=0) dx = \frac{1}{2} B p \quad \dots\dots (10)$$

を得る。そこで 圧密初期と終期の圧密ポテンシャルを比較すると

$$\int_0^\infty \varphi(t=\infty) dx = 2(1-\nu) \int_0^\infty \varphi(t=0) dx \quad \dots\dots (11)$$

であり φ は平均的に過程中 $\nu=0$ の時2倍に増加し、 ν の増加と共に φ の増加量が減少し、 $\nu=0.5$ の時 φ は過程中変化しない。

一次元圧密の場合 φ は (4)式の $\varepsilon_x=0$ において得られ

$$\varphi = \sigma_z = p \quad \dots\dots (12)$$

上式から分るように、定荷重 ($dp/dt = 0$) の場合には 圧密過程中 φ は変動しない。即ち、圧密方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{d\varphi}{dt} (= \frac{dp}{dt}) = 0 \quad (\text{一次元圧密}) \quad \dots\dots (13)$$

である。帯基礎の場合、 B/H が極めて大きくなると 載荷中心 ($x=0$) 附近での間隙水の流れはほぼ一次的であると見做し得るので、近似的に圧密方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{d\varphi}{dt} \geq 0 \quad (\text{帯基礎の圧密、} B \gg H \text{ の時 } x=0 \text{ 附近で}) \quad \dots\dots (14)$$

である。これは過程中 φ が増加即ち Mandel-Creyer 効果の生じるケースであり、一次元圧密の場合でいうと、荷重が $\frac{1}{2}p$ から $(1-\nu)p$ に増加する漸増載荷の圧密過程と等価である。この様子をスキマティックにオ2図に示した。したがって B/H の極めて大きい、上下端面滑らかな地盤の帯基礎の圧密過程は 一次元圧密の過程より遅れて進行する。このような境界条件のもとで載荷中を無限に大きくした時、その圧密過程が一次元圧密のそれに一致しないのは上述の通りであるが、載荷中に無関係に成立する(1)式が一次元圧密では成立しないことから容易に理解されるであろう。

3. あとがき

さて、F.E.Mによる右図(1)の解が $B/H \rightarrow \infty$ の時、一次元圧密に漸近しようとする傾向を見せたのは 制御領域の境界条件の設定に原因するものであった。F.E.Mでは x 方向に無限大の領域を設定することはできないので、 $x_1 = B+3H$ を制御領域境とし、その境界条件を $u_x(x=x_1) = 0$ とした。これは(1)式を無視し、(6)式の $u_x(x=\infty)$ を零とした事に外ならない。即ち制御領域内で過程中 φ のやりとりはあるが、平均的に $\bar{\varphi} = p$ 一定とした事になる。そのため B/H の増加と共に一次元圧密の過程に漸近することになる。この真制御領域の境界条件を $u_x(x=x_1) = 0$ ではなく、 $\sigma_x(x=x_1) = 0$ としていたなら Gibson の解と同じものを得たであろう。このようなメカニズムによって一次元圧密に漸近する FEM 解を先入観で評価したのは、一種の呼び込みであり、F.E.Mを適用する場合、注意しなければならぬことであつた。尚オ1図には下端面拘束の場合の FEM 解(右図(2))が挿入されているが、 φ の増加は小さく、圧密過程は Gibson ほど遅くなく、 $\nu=0 \sim 0.5$ の場合の圧密過程はオ1図中の斜線の部分に入る。なおこの研究は文部省科学研究費の援助をうけて行なわれた。謝意を表する。

参考文献 1) Gibson, Schiffman, *Pu* (1970): *Plane Strain and Axially Symmetric Consolidation of a Clay Layer on a Smooth Base, Mech.s and Applied Math.s, Vol. 23*

- | | |
|-------------------------------------|---------------|
| 2) 山口, 村上 (1972) 有限粘土層の多次元圧密について | オ7回土質工学研究発表会 |
| 3) 吉岡, 中, 堂 (1972) 有限地盤の帯状基礎による圧密 | オ27回土木学会年次講演会 |
| 4) 山口, 村上 (1972) 多次元圧密問題の厳密解について | オ8回土質工学研究発表会 |
| 5) 吉岡, 中, 堂, 伊藤 (1974) 帯基礎の圧密挙動について | オ29回土木学会年次講演会 |

オ2図 一次元圧密と帯基礎の圧密 (上下端面滑らか $B \gg H$)

