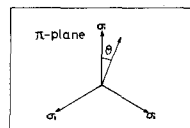


### 1. はじめに

筆者は、既に、相異なる三主応力下における粒状体のせん断破壊機構に関するモデルについて報告した<sup>②</sup>。今回、宮森下部の報告<sup>①</sup>に示された $\pi$ 平面上の5種の応力経路下での、乾燥砂の実験結果との対応を検討したので報告する。

### 2. 応力経路とパラメーター

解析に用いた応力経路は、図-1に示すように、 $\pi$ 平面上で $\sigma_1$ 軸から $\theta$ の角度で直線的に増加するものである。 $\theta$ として、 $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ の5種を考慮した。それぞれのパスにおける応力増分 $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3$ 間の関係を検討してみよう。図-2は、三次元応力空間 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ に、 $\pi$ 平面を描いたもので、 $VO$ は静水圧線( $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$ )であるベクトル $\vec{OC}$ の方向余弦は $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ である。 $\pi$ 平面上で $\vec{OC}$ から $\theta$ なる角度で、 $O$ 点を出発点として直線的に増加する応力増分ベクトル $\vec{OF}=(d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3)$ を考える。 $\vec{OF}$ の方向余弦は $\frac{1}{\sqrt{d\sigma_1^2+d\sigma_2^2+d\sigma_3^2}}(d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3)$ であるから、 $\vec{OC}$ と $\vec{OF}$ の内積は、次の様になる。



(図-1 応力経路)

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{d\sigma_1^2+d\sigma_2^2+d\sigma_3^2}} \cdot (2d\sigma_1 - d\sigma_2 - d\sigma_3) \quad \text{--- (1)}$$

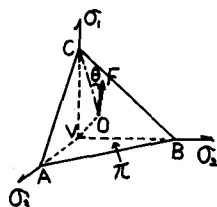
一方、 $\pi$ 平面上では、平均主応力  $P = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \text{一定}$  であるから、次式が成立つ。

$$d\sigma_1 = -d\sigma_2 - d\sigma_3 \quad \text{--- (2)}$$

(1), (2) 式から、結局、ベクトル増分 $d\sigma_2, d\sigma_3$ について次式が成立つことになる。

$$(3-4\cos^2\theta)(d\sigma_2)^2 + 2(3-2\cos^2\theta)d\sigma_2 d\sigma_3 + (3-4\cos^2\theta)(d\sigma_3)^2 = 0 \quad \text{--- (3)}$$

(3)式に、 $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ をそれぞれ代入して解き、その結果を(2)式に代入することによって、結局、表-1に示すような、それぞれのストレスパス上での応力増分についての関係が得られることになる。なお、表-1の結果は、モデルの定義に従って、引張り側を正としてある。又、解析で用いたパラメータの定義は、宮森等<sup>①</sup>のそれに従い、次の通りである。但し、引張り側を正としてある。



(図-2 三次元応力空間)

$$\begin{cases} P = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), & \bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\}^{1/2} \\ d\bar{\sigma} = d\epsilon_1 + d\epsilon_2 + d\epsilon_3, & d\bar{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{(d\epsilon_1 - d\epsilon_2)^2 + (d\epsilon_2 - d\epsilon_3)^2 + (d\epsilon_3 - d\epsilon_1)^2\}^{1/2} \end{cases} \quad \text{--- (4)}$$

(表-1)

### 3. ストレス-ダイラタンシー関係

モデルと宮森等のデータとの照合を行う為には、 $\bar{\sigma}$ と $\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}}$ との関係式が、それぞれのパスについて示されなくてはならない。これは、表-1の結果と等方圧縮の初期条件を、モデルから与えられた歪増分と応力増分増分の関係式<sup>①</sup>に適用することによって得られる。

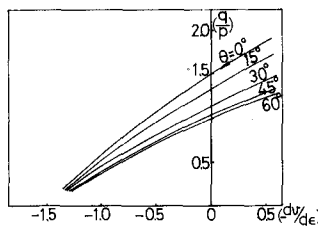
| $\theta$   | 応力増分関係                                                                           |
|------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| $0^\circ$  | $d\sigma_2 = d\sigma_3 = -\frac{1}{2}d\sigma_1 > 0$                              |
| $15^\circ$ | $d\sigma_1 = 0.366d\sigma_2, d\sigma_3 = -1.366d\sigma_2 < 0$                    |
| $30^\circ$ | $d\sigma_1 = -d\sigma_3 < 0, d\sigma_2 = 0$                                      |
| $45^\circ$ | $d\sigma_1 = -(\sqrt{3}-1)d\sigma_2 < 0, d\sigma_3 = -(2-\sqrt{3})d\sigma_2 < 0$ |
| $60^\circ$ | $d\sigma_1 = d\sigma_2 = -\frac{1}{2}d\sigma_3 < 0$                              |

#### 3-1. 歪増分と応力および応力増分の関係

三次元モデルで得られた歪増分と応力および応力増分との関係は、次式の通りであった。なお、応力と歪は、共に、引張り側を正としている。

$$\begin{cases} d\epsilon_1 = K(1+\epsilon_1)^{1/2} \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} = K(1+\epsilon_1) \left\{ \mu + \frac{1}{\bar{\sigma}} \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} \right\} \\ d\epsilon_2 = K(1+\epsilon_2)^{1/2} \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} = K(1+\epsilon_2) \left\{ \mu + \frac{1}{\bar{\sigma}} \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} \right\} \\ d\epsilon_3 = K(1+\epsilon_3)^{1/2} \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} = K(1+\epsilon_3) \left\{ \mu + \frac{1}{\bar{\sigma}} \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} \right\} \end{cases} \quad \text{--- (5)}$$

$$\begin{aligned} \text{但し、} \bar{\sigma} &= -(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^{1/2}, \quad \bar{\epsilon} = -(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)^{1/2}, \quad \bar{P} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^{1/2}, \quad \Delta^2 = (d\bar{\sigma})^2 + (d\bar{\epsilon})^2 \\ d\bar{\sigma} &= (\frac{1}{2})(-\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)^{1/2} \{-(\sigma_1 + \sigma_2)d\sigma_1 + \sigma_1(d\sigma_2 + d\sigma_3)\} \quad \text{--- (6)} \\ d\bar{\epsilon} &= (\frac{1}{2})(-\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3)^{1/2} \{-(\epsilon_1 + \epsilon_2)d\epsilon_1 + \epsilon_1(d\epsilon_2 + d\epsilon_3)\} \quad \text{--- (7)} \end{aligned}$$



(図-3 ストレス-ダイラタンシー関係(θの影響))

以下の解析では, (5)式で  $1+\varepsilon_i \div 1$  ( $i=1, 2, 3$ ) としている。

3-2  $\theta = \theta^0$  の場合

表-1の結果と(7)式より  $\theta = 0^\circ$  の時は、次式が成立つ。

$$d\bar{r} = \left(\frac{1}{2}\right)(-\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)^{-\frac{3}{2}}(-\sigma_1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2(\sigma_1 + 2\sigma_3)d\sigma_3$$

$$d\bar{q} = d\bar{p} = \left(\frac{1}{2}\right)(-\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)^{-\frac{3}{2}}(-\sigma_3)^{-\frac{1}{2}}(-1)(\sigma_1 + 2\sigma_3)d\sigma_3$$

$$\therefore \frac{d\bar{P}}{d\bar{r}} = (-1/2)(\sigma_i/\sigma_j)^{1/2} = (-1/2)R_{ij}^{1/2}, \text{ 但 } R_{ij} = \sigma_i/\sigma_j \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

$$\therefore \frac{d\bar{r}}{d\Delta^2} = -\sqrt{2}/\sqrt{R_{13}+2}, \quad \frac{d\bar{g}}{d\Delta^2} = \frac{d\bar{p}}{d\Delta^2} = \sqrt{R_{13}}/\sqrt{2(R_{13}+2)}, \quad \frac{1}{\bar{r}} = -\sqrt{R_{13}+2}/\sqrt{R_{13}}, \quad \frac{1}{\bar{g}} = \frac{1}{\bar{p}} = -\sqrt{R_{13}+2}$$

以上を(5)式に代入すると,

$$d\epsilon_1 = K/\sqrt{1+\mu^2} \cdot \{ \mu + \sqrt{2/R_{13}} \}, \quad d\epsilon_2 = d\epsilon_3 = K/\sqrt{1+\mu^2} \cdot \{ \mu - \sqrt{R_{13}/2} \}$$

$$\therefore dV = \frac{K}{\sqrt{1+\mu^2}} \cdot \{3\mu + \sqrt{2}/R_{13} - \sqrt{2}R_{13}\}, \quad d\epsilon = \frac{2}{3} \cdot \frac{K}{\sqrt{1+\mu^2}} \cdot \{\sqrt{2}/R_{13} + \sqrt{R_{13}}/2\}$$

$$\therefore -\frac{dV}{d\epsilon} = \frac{3}{2} \cdot \{\sqrt{2R_3} - \sqrt{2/R_3} - 3\mu\} / \{\sqrt{2/R_3} + \sqrt{R_3}/\sqrt{2}\}$$

$$\therefore -\frac{dv}{dt} \approx \frac{g}{\rho} - \frac{1}{\rho} \cdot \sqrt{(3 - \frac{g}{\rho})(3 + 2\frac{g}{\rho})} \quad (\theta = 0^\circ)$$

 $(\theta = 0^\circ)$ 

同様にして、 $-\frac{dv}{d\epsilon} = -\frac{3}{12} \cdot \{ \sqrt{3} \cdot M \cdot \sqrt{\frac{D}{P}} + 1.366 R_{31} - 0.366 R_{32} - 1 \} / \{ S^2 + T^2 + V^2 \}^{\frac{1}{2}}$  ( $\theta = 15^\circ$ )

$$T = 0.366 R_{32} - 1, V = 1.366 R_{31} + 1, R_{31} = (1 - 0.4714\%) / (1 + 0.644\%), R_{32} = (1 - 0.4714\%) / (1 - 0.1725\%)$$

$$-4\frac{1}{6} = \{3 \cdot \frac{9}{16} - 3\sqrt{3}/15 \cdot \mu \cdot \sqrt{3 - (\frac{9}{16})^2}\} / \{(\frac{9}{16})^2 + 9\}^{\frac{1}{2}} \quad (\theta = 30^\circ)$$

$$-\frac{dv}{ds} = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \sqrt{3} \cdot \mu \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{2}} + (\sqrt{3}-1) R_{31} + (2-\sqrt{3}) R_{32} - 1 \right\} / \{x^2 + y^2 + z^2\}^{\frac{1}{2}} \quad (2-45)$$

$$(12L, E = 1 + 2(2-\sqrt{3})R_{31} + (7-4\sqrt{3})R_{32}, \sqrt{3}/\sqrt{p} = 1 - \frac{1}{3} \cdot (2-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{p}, X = (\sqrt{3}-1)R_{31} - (2-\sqrt{3})R_{32})$$

$$Y = (2 - \sqrt{3})R_{32} + 1, Z = (\sqrt{3} - 1)R_{31} + 1, R_{31} = \{1 - \frac{1}{3\sqrt{2-\sqrt{3}}} \cdot \frac{2}{P}\} / \{1 + (\sqrt{3}-1)/3\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{P}\}$$

$$R_{32} = \{1 - \frac{1}{3} \sqrt{2-3} \cdot \frac{2}{p}\} / \{1 + \sqrt{2-3} / 3 \cdot \frac{2}{p}\}$$

$$-\frac{dv}{d\epsilon} = \frac{8}{p} - \frac{3}{2} \cdot \mu \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{p} + 2\right) \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{p}\right)} \quad (\theta = 60^\circ)$$

 $(\theta = 60^\circ)$ 

#### 4. 実験結果との対応

物理摩擦角 $\phi_s = 35^\circ$ として、上記のストレス-ダイラタンシー式から得られた結果を図-3に示す。これより、 $\phi$ が大きくなるにつれて、曲線が平行移動してきており、宮森等の結果と定性的に一致しているのが認められる。

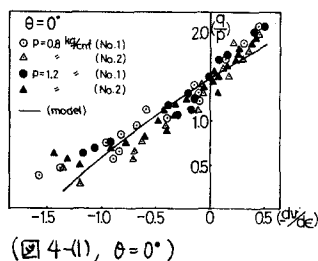
図-4(4)~(5)は、より詳細に実験結果と対応させたものである。これから、実験結果とほぼ良い一致を示しているのが判るが、 $\theta_m=35^\circ$ は、物理摩擦角としては、大きすぎるように思われ、このあたりは、今後の課題の一つが残されているように思われる。

5. 終リト.

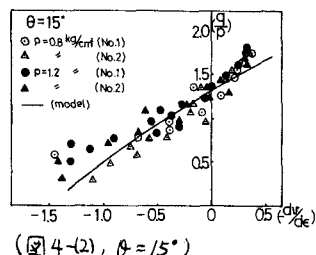
三次元応力状態下の砂の挙動の一部が、定性的には、本モデルで表現得ていることが判明した。今後、平面歪条件下の応力の関係について報告していきたいと考えている。末筆ながら、貴重なデータを送って下さり、又、質問にも快く応じて下さった日大理工学部 宮森先生に、深謝の意を表します。

## 6. 参考文献

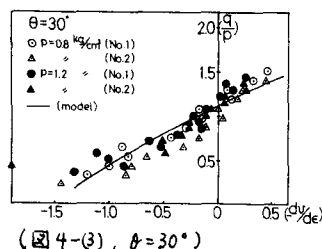
- ①: 徳江「粒状体のせん断機構に関する三次元モデル」, 1975. 6. 第10回土質工学会
- ②: 徳江「」(その2), 1976. 6. 第11回土質工学会
- ③: 下郡官森「乾燥砂の多軸圧縮試験(予報)」, 1975. 10. 第30回土木学会



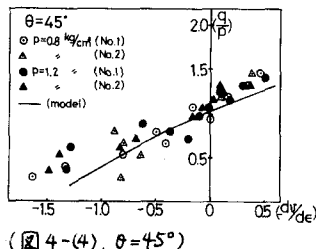
(图 4-1),  $\theta = 0^\circ$ )



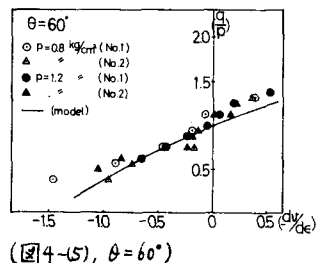
(图 4-2),  $\theta = 15^\circ$ )



(2) 4-(3),  $\theta = 30^\circ$ )



(图 4-4),  $\theta = 45^\circ$ )



(例 4-5),  $\theta = 60^\circ$ )