III-27　粒状体力学のグラフ理論による構成とその考察

東北大学　正員　佐武 正雄

1. まえがき

粒状体力学を構成する場合，一般に連続体として考察するマクロ的表現が用いられている。本文は，まず，粒状体をミクロ的に粒子の集合と考え，これをグラフに置換え，力の釣合方程式・相対変位の定義式やその適合条件などをグラフ理論の基本行列を用いて記述する。この表現と連続体的表現との対応を述べ，ミクロ的表現からマクロ的表現に移行する場合の問題点などについて考察する。

2. グラフ理論による基礎方程式

簡単のため粒子は球形とし，図−1(2次元)に示すように，粒状体を一つの有向グラフに置換え，これを置換グラフと称することにする。置換グラフと粒状体の対応は表−1のようになっている。また，用いられる力学量は表−2に示すとおりである。ここに $\dot{i}$ は $\dot{1},\dot{2},\cdots\cdots\dot{n}$ をとる指標である。接触力などは有向枝に正連結の粒子に働らくものを考え，相対変位などは負連結の粒子に対するものとする。従って たとえば，図−2において

$$\Delta u_1 = u_{\dot{2}} - u_{\dot{1}} \tag{1}$$

である。

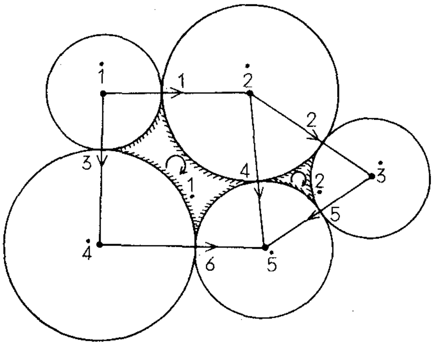

図 − 1

上述のように力学量を導入すれば，力の釣合方程式($2(\dot{n}-1)$個)は，接続行列 $D_{\dot{i}j}$ を用いて，

$$D_{\dot{i}j} S_j + F_{\dot{i}} = 0 \tag{2}$$

$$D_{\dot{i}j} M_j + \rho_{\dot{i}} D'_{\dot{i}j} (n_j \times S_j) + N_{\dot{i}} = 0 \tag{3}$$

と示される。ここに $\rho_{\dot{i}}$, n_j は図−2に示すようにそれぞれ粒子 $\dot{i}$ の半径，及び有向枝 j の単位ベクトルで，$D'_{\dot{i}j}$ は置換グラフを無向グラフとした場合の接続行列である。また，行列の後方でくり返し現われる指標については和をとるものとする。式(2),(3)は連続体における釣合方程式

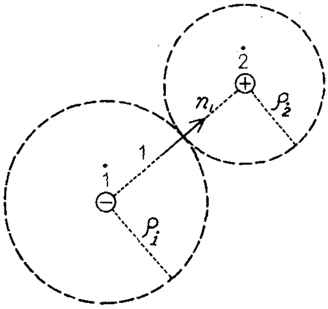

図 − 2

$$\nabla \cdot \sigma + F = 0 \tag{4}$$

$$\nabla \cdot \mu + I \cdot \times \sigma + N = 0 \tag{5}$$

に対応している。[1)2)] ここに，σ は応力，μ は偶応力，I は単位テンソルである。特に，$M_j = 0$, $N_{\dot{i}} = 0$ とし，$S_j = n_j \cdot \sigma$ と考えれば，式(3)は

$$D'_{\dot{i}j}\, n_j n_j \cdot \times \sigma = 0 \tag{6}$$

となり，これが応力の対称性を示す式

$$I \cdot \times \sigma = 0 \tag{7}$$

に対応していることがわかる。ここで I は等方性であるが，式(6)の $D'_{\dot{i}j}\, n_j n_j$ には接触の方向を示す n_j が関与していることが注目される。また，物体力 $F_{\dot{i}}$ がない場合，閉路行列 $L_{j\underset{.}{k}}$ に関する恒等式 $D_{\dot{i}j} L_{j\underset{.}{k}} = 0$ を考慮して

$$S_j = L_{j\underset{.}{k}} f_{\underset{.}{k}} \tag{8}$$

表 − 1

粒状体	置換グラフ	数
粒子	節点	$\dot{n}$
接触点	枝	n
間隙	閉路	$\underset{.}{n}$

表 − 2

力の量			変形の量		
名称	記号	個数	名称	記号	個数
物体力	$F_{\dot{i}}$	$\dot{n}$	粒子変位	$u_{\dot{i}}$	$\dot{n}$
物体モーメント	$N_{\dot{i}}$	$\dot{n}$	粒子回転	$\omega_{\dot{i}}$	$\dot{n}$
接触力	S_i	n	相対変位	Δu_i	n
接触モーメント	M_i	n	修正相対変位	$\overset{*}{\Delta} u_i$	n
			相対回転	$\Delta\omega_i$	n

とおくことができる。ここに f_k は各閉路 k で定義されるベクトルで応力関数に相当するものと考えることができる。

次に，相対変位は式（1）を参照し，次式のように定義される。

$$\Delta w_i = D_{ij}\ w_j \tag{9}$$

$$\Delta u_i = D_{ij}\ u_j \tag{10}$$

$$\overset{*}{\Delta} u_i = D_{ij}\ u_j + n_i \times D'_{ij}\, \rho_j\, w_j \tag{11}$$

Δu_i が二つの粒子の中心の相対変位を示すのに対し，$\overset{*}{\Delta} u_i$ は二つの粒子の接触点（変形前は同一の点）の相対変位を示すもので，これを修正相対変位と呼ぶこととする。[1)2)3)] 式（9），（11）は連続体における歪の定義式

$$\alpha = \nabla w \tag{12}$$

$$\gamma = \nabla u + I \times w \tag{13}$$

に対応している。[1)2)] ここに α は回転歪，γ は歪（一般に非対称）である。ここで，$\overset{*}{\Delta} u_i = \rho_i\, n_i \cdot \gamma$，ただし $\rho_i = D'_{ij}\, \rho_j$ （枝 i の長さ）と考え，$\gamma = \frac{1}{\rho_i} n_i \overset{*}{\Delta} u_i$ とおく。このことを考慮して式（11）を書きかえれば，

$$\frac{1}{\rho_i} n_i \overset{*}{\Delta} u_i = \frac{1}{\rho_i} n_i D_{ij}\ u_j + n_i\ n_i \times w_i \tag{14}$$

（ただし，$w_i = \frac{1}{\rho_i} D'_{ij}\, \rho_j\, w_j$ とおいた）を得るから，この場合も I と $n_i\, n_i$ とが対応していることがわかる。
恒等式 $L_{ij}\, D_{jk} = 0$ から，相対変位の適合条件式（2n個）として

$$L_{ij}\, \Delta w_j = 0 \tag{15}$$

$$L_{ij}\, \Delta u_j = L_{ij}\,(\overset{*}{\Delta} u_j - \rho_j\, n_j \times w_j) = 0 \tag{16}$$

を得る。

力と変形の関係として，弾性法則

$$n_i \cdot S_i = E\, n_i \cdot \overset{*}{\Delta} u_i \tag{17}$$

$$(I - n_i n_i) \cdot S_i = G\,(I - n_i n_i) \cdot \overset{*}{\Delta} u_i \tag{18}$$

$$M_i = H\, \Delta w_i \tag{19}$$

を与えれば，これはベクトルとして2n個の関係式となる。Euler の定理

$$\dot{n} + \underset{\cdot}{n} - n = 1 \tag{20}$$

を考慮すれば，未知数と条件式の数は何れも4n個で同数となっていることがわかる。[3)]

3. あとがき

グラフの基本行列を用いて，粒状体力学の基礎式を示し，連続体的表現との関連などを考察した。本文で述べたようなミクロ的表現には，粒子半径 ρ_i や粒子の接触方向 n_i が含まれ，これらの不均一さをいかに取扱って，マクロ的表現に結びつけていくかが重要な研究課題であると思われる

参考文献

1). M.Satake ： On Mechanical Quantities in Generalized Continua, Tech. Rep. Tohoku Univ。Vol.35 No.1(1970), 15−37

2). M.Satake ： Mechanical Quantities and their Relations in Continuum and Discrete Materials, Rev. Roum. Sci. Tech, Serie Mec. Appl. Vol.16 No.6(1971), 1235−1251

3). 佐武 正雄 ： 粒状体力学の解析に関する一考察，土木学会第25回年次学術講演会講演集 Ⅲ−21 (1970), 65−68