

石川島播磨重工業 正員 柳沢一郎

1. はじめに

相変化を伴う非定常熱伝導自由境界問題についてはF. Neumannの解析解とこの特別な場合としてJ. Stefanの解析解が得られているにすぎず、ほとんどの場合には近似的な数値解析に依存している。この数値解析には古くから差分法が用いられてきたが、一般的にはConventional法, MarryとLandisによって提案された移動温度変法と固定温度変法が有名である。さらに移動温度変法と関数近似法を併用した庄司¹⁾の方法や近藤²⁾の完全差分の方法が新しく、また多次元多層問題は大型電算機の発達に伴って有限要素法による解析が盛んに行なわれている。この様に自由境界問題については古くから多くの学者達によって研究されてきたが、最近応用数学界で処罰法と差分法の併用で数値解析する方法が提案されこの手法が高く評価されている。³⁾⁴⁾⁵⁾

そこでこの講演ではこの手法を用いて地下タンクの2次元4層問題を数値解析した結果をのべる。さらに自由境界での地下水の吸排水速度の凍結領域への影響についても検討した。計算モデルは第1図に示す。

2. 記号

$U_i(r, z; t)$	各層の温度($^{\circ}\text{C}$), $i=1\sim 3$	U_0, U_c	地中平均(外気)及び液体温度($^{\circ}\text{C}$)
$\alpha_i, i=0\sim 3$	" 熱伝導率($\text{Kcal/m}^2\text{sec}^{\circ}\text{C}$)	$\sigma_i, i=1\sim 3$	各層の温度伝導率(m^2/sec)
H	地表の熱伝達率($\text{Kcal/m}^2\text{sec}^{\circ}\text{C}$)	L_2, L_w	凍土及び氷の潜熱(Kcal/kg)
v	凍結面での吸排水速度(m/sec)	ρ_2, ρ_w	" 密度(kg/m^3)
$S(r, z; t)$	凍結距離(m)	a_i, b_i	各層材の座標(m), $i=1\sim 4$
$t_{cr}(r, z)$	断熱材外面が 0°C になる時刻(sec)	t_0	クールダウンに要する時間(sec)
h_r, h_z, k	r, z, t 軸の差分間隔($\text{m}, \text{m}, \text{sec}$)	D_1, D_2, D_3	各層の領域

3. 処罰法を用いるときの偏微分方程式と諸条件

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = \sigma_1 \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} \right), \text{ in } D_1, t \geq 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} = \sigma_2 \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} \right) - K_2 \chi_2 U_2, \text{ in } (D_2 + D_3), t \geq 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial t} = \sigma_3 \left(\frac{\partial^2 U_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_3}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial z^2} \right) - K_3 \chi_3 U_3, \text{ in } (D_2 + D_3), t \geq 0 \quad (3)$$

ここに $K_i \chi_i U_i$ ($i=2, 3$) は処罰項で、 K_i は正の定数(処罰定数)であってかつ

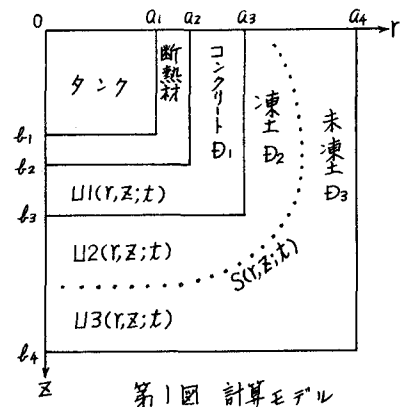
$$\chi_2 = 0, \quad \chi_3 = 1 \quad \text{in } D_2$$

$$\chi_2 = 1, \quad \chi_3 = 0 \quad \text{in } D_3$$

$$\text{初期条件} \quad U_1 = U_3 = U_0, \quad t = 0 \quad (4)$$

境界条件 各固定境界では熱流と温度が連続という条件が必要であるが、紙面の都合上省略する。す。ただし $(r = a_4, 0 \leq z \leq b_4)$ と $(z = b_4, 0 \leq r \leq a_4)$ の境界は断熱条件として。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \frac{\partial U_1}{\partial r} &= \frac{\alpha_0}{a_2 - a_1} (U_1 - U^*), \quad t \geq 0, r = a_2, 0 \leq z \leq b_2 \\ \alpha_1 \frac{\partial U_1}{\partial z} &= \frac{\alpha_0}{b_2 - b_1} (U_1 - U^*), \quad t \geq 0, z = b_2, 0 \leq r \leq a_2 \end{aligned} \right\} (5) \quad \text{但し } U^* = \begin{cases} \frac{t - t_0}{t_0} (U_c - U_0) + U_c, & 0 \leq t \leq t_0 \\ U_c, & t \geq t_0 \end{cases}$$



次に自由境界面での熱流の釣合条件は次式を満足しなくてはならないと E. Penner⁶⁾ により提案されている。即ち freezing point を 0°C とすると、

$$\alpha_2 \frac{\partial U_2}{\partial n} - \alpha_3 \frac{\partial U_3}{\partial n} = L_2 \rho_2 \frac{\partial S(Y, Z; t)}{\partial t} + L_w \rho_w V, \quad U_2 = U_3 = 0, \quad t \geq t_{cr}(r, z) \quad (6)$$

最後に処罰法を使うときの条件で、freezing point を 0°C と仮定しているのだ。

$$(2) \text{式について} \quad U_2(a_4, z; t) = 0, \quad 0 \leq z \leq b_4, \quad t \geq t_{cr}(z); \quad U_2(r, b_4; t) = 0, \quad 0 \leq r \leq a_4, \quad t \geq t_{cr}(r) \quad (7)$$

$$(3) \text{式について} \quad U_3(a_3, z; t) = 0, \quad 0 \leq z \leq b_3, \quad t \geq t_{cr}(z); \quad U_3(r, b_3; t) = 0, \quad 0 \leq r \leq a_3, \quad t \geq t_{cr}(r) \quad (8)$$

という境界条件のもとで領域 $D_2 + D_3$ 内の U_2, U_3 を解くことは処罰法という。また自由境界 $S(Y, Z; t)$ は (6) をもとにして積分 (2), (3) を用いることにより得られるが、数値計算の便宜上、下記の2式に分けて表わす。

$$S(z; t) \approx S_{0z} - \frac{L_w \rho_w}{L_2 \rho_2} \int_{t_{cr}(z)}^t V dt - \frac{1}{L_2 \rho_2} \left\{ \frac{\alpha_2}{\sigma_2} \int_{t_{cr}(z)}^t dt \int_{S(z, t)}^{a_4} K_2 \chi_2 U_2 dr + \frac{\alpha_3}{\sigma_3} \int_{t_{cr}(z)}^t dt \int_{a_3}^{S(z, t)} K_3 \chi_3 U_3 dr \right\} \quad (9)$$

$$a_3 \leq r \leq a_4, \quad 0 \leq z \leq b_3, \quad t \geq t_{cr}(z)$$

$$S(r; t) \approx S_{0r} - \frac{L_w \rho_w}{L_2 \rho_2} \int_{t_{cr}(r)}^t V dt - \frac{1}{L_2 \rho_2} \left\{ \frac{\alpha_2}{\sigma_2} \int_{t_{cr}(r)}^t dt \int_{S(r, t)}^{b_4} K_2 \chi_2 U_2 dz + \frac{\alpha_3}{\sigma_3} \int_{t_{cr}(r)}^t dt \int_{b_3}^{S(r, t)} K_3 \chi_3 U_3 dz \right\} \quad (10)$$

$$0 \leq r \leq a_4, \quad b_3 \leq z \leq b_4, \quad t \geq t_{cr}(r)$$

但し S_{0z}, S_{0r} は初期値

4 数値計算結果

偏微分方程式の中の時間微分を前進差分で、他の微分を中心差分でおこなって計算する。計算の対象としたタンクは10万KL LNG 地下タンクで物性値及び計算定数を表-1に、計算結果を第2図~第6図にそれぞれスライドで示す。凍結を伴うときの吸排水速度については高志⁷⁾の実験式があり、この式から土中の V を計算すると $0.01 \sim 0.02$ mm 程度になるが、一般の地盤では透水系数がはるかに大きいので V もこれより大きくはると予想される。そこで V は $0, \pm 0.04, \pm 0.2, \pm 0.3$ mm の場合を計算した。この結果凍結領域に及ぼす吸排水速度の影響の大きいこと、また F の様に自由境界に於ける釣合条件が複雑にはなっており処罰法を使って定式化し数値計算する方法はすぐれた手法であることが分かった。詳細は論文報告集に発表予定。

最後に河原田、名取両先生には終始御指導戴き感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 庄司正弘 凍結問題の数値解法 冷凍, 第50巻第573号, 50年7月
- 2) 近藤尚夫 防熱構造の外部に生ずる凍結状態の数値解析 機械学会講演論文集 740-17, 49年11月
- 3) H. Kawarada, M. Natori On Numerical Solutions of Stefan Problem I
Memoirs of Numerical Mathematics No.1, 1974
- 4) H. Kawarada, M. Natori On Numerical Solutions of Stefan Problem II
Memoirs of Numerical Mathematics No.2, 1974
- 5) 河原田, 名取 相変化を伴う多相熱伝導問題 第13回 SICE 学術講演会, 49年8月
- 6) E. Penner The Importance of Freezing Rate in Frost Action in Soils, Res. Paper No.126, Nat. Res. Council,
Ottawa, Canada, Jul. 1961
- 7) 高志他 土の凍結膨張率に及ぼす凍結速度、有効応力の影響に関する研究 雪氷, 36巻2号 1974年