

II-335 大気汚染濃度に関する統計的研究

京大原子炉実験所 学生員 重光 和之
同上 正員 塚谷 恒雄
同上 正員 筒井 天壽

I. はじめに 疫学調査、動植物の暴露実験などにより、大気汚染障害に関する研究が進み、汚染レベルと影響の関係の究明が行われているが、これらの調査・実験では、平均濃度あるいは一定濃度と影響の関係をとりえているにすぎない。影響に關与する汚染レベルの記述としては、年平均値のみならず、各平均化時間に対する一定レベル以上の高濃度の出現頻度、あるいは濃度変動勾配などが必要となる。Larsen¹⁾らは、大気汚染物濃度を対数正規分布と仮定することにより、各平均化時間に対する高濃度出現確率を与えている。しかしながら全ての平均化時間に対して濃度が対数正規分布になるという仮定は、中心極限定理により正しくないことがわかる。ここでは3パラメータのPearson系分布を導入することにより、数学的に厳密に単位時間の濃度分布から任意の平均化時間に対する濃度分布を求めてみる。

II. Pearson系分布による大気汚染濃度解析 Pearson系分布は式(1)の変数分離型微分方程式の解として定義される。その主要な分布は、I型(Beta分布)、III型(Gamma分布)、V型およびVI型(第2Beta分布)である。一般には歪度 $\beta_1 (= \mu_3^2 / \mu_2^3)$ 、尖度 $\beta_2 (= \mu_4 / \mu_2^2)$ を使った方法²⁾が用いられるが、4次モーメント μ_4 は、1次モーメント μ_1 に比べて計算が複雑であり、誤差が大きくなるので、1~3次モーメント μ_1, μ_2, μ_3 による解析方法³⁾を開発した。すなわち、変動係数 $\delta_2 (= \mu_2 / \mu_1^2)$ 、歪み係数 $\delta_3 (= \mu_3 / \mu_1 \cdot \mu_2)$ を計算し、 $\delta_2 - \delta_3$ 図により分布型を判定する。各分布型の確率密度関数を表1に示す。

$\delta_2 - \delta_3$ 平面上における各分布型の存在領域は図1のとおりである。I型、V型は領域を示し、III型、VI型は線上にある。図1には対数正規分布の存在領域(放物線上; LNで示す)、および対数正規分布に近似可能な範囲(99.9パーセンタイル値の相対誤差が5%以下; 点線で挟まれた部分)もあわせて描いた。第2Beta分布(VI型)の平均値回りの1~3次モーメント μ_1, μ_2, μ_3 および変動係数 δ_2 、歪み係数 δ_3 は表2のようになり、分布パラメータは表3のようになる。

大阪府岬町、堺市の二酸化硫黄1時間値の1ヶ月間のデータをもとにして、 δ_2, δ_3 の値を計算し、これを $\delta_2 - \delta_3$ 平面にプロット(図1の○印)することにより、大気汚染濃度の分布型を調べた。濃度はほぼVI型で表現できることがわかった。

$$\frac{df}{dx} = \frac{(x+c)f}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} \quad (1)$$

Table 3 Solutions to the moment equations

$$\gamma = \alpha + \beta = \frac{2(\delta_2 - \delta_3 - 1)}{\delta_3 - 2\delta_2}$$

$$\alpha = \frac{\gamma}{\gamma\delta_2 + \delta_2 + 1}$$

$$a = -\frac{\gamma}{\alpha} \mu_1$$

Table 1 Pearson types I, III, V, VI densities

Type	Density
I	$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \frac{1}{a^{\alpha+\beta-1}} x^{\alpha-1} (a-x)^{\beta-1} \quad (0 \leq x \leq a)$
III	$f(x) = \frac{\beta^v}{\Gamma(v)} \exp(-\beta x) x^{v-1} \quad (0 \leq x)$
V	$f(x) = \frac{\beta^v}{\Gamma(v)} \exp(-\frac{\beta}{x}) (\frac{1}{x})^{v+1} \quad (0 \leq x)$
VI	$f(x) = \frac{a^{1-\alpha-\beta}}{B(\alpha, 1-\alpha-\beta)} \frac{x^{\alpha-1}}{(a+x)^{1-\beta}} \quad (0 \leq x)$

Table 2 1st-3rd moments about mean, coefficients of variation and skewness of the Pearson type VI density

$\mu_1 = -a \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$
$\mu_2 = a^2 \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2 (\alpha+\beta+1)}$
$\mu_3 = 2a^3 \frac{\alpha\beta(\beta-\alpha)}{(\alpha+\beta)^3 (\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)}$
$\delta_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1^2} = \frac{\beta}{\alpha(\alpha+\beta+1)}$
$\delta_3 = \frac{\mu_3}{\mu_1 \mu_2} = \frac{2(\beta-\alpha)}{\alpha(\alpha+\beta+2)}$

対数正規確率紙上に実測値, Pearson 系分布および対数正規分布の累積線を描き, Pearson 系分布および対数正規分布の適合度を検定した。この例を図2に示す。図中の曲線は Pearson 系分布, 折線は実測値, ○印は対数正規分布の 99, 50, 1 パーセント値を示す。第2 Beta 分布は対数正規分布に比べ, 高濃度域の適合度が高いことがわかる。

III. 平均化時間解析 1 時間値の濃度分布を基準にして, S 時間平均濃度の分布を求める。1 時間値の分散と3次モーメントを M_2, M_3 , S 時間平均値のそれらを $M_2(S), M_3(S)$ とするとき, 分散の間には自己相関係数 $R(t)$ を用いた式(2)の関係式が成立する。原系列がマルコフ系列をなす場合, 近似的に3次モーメントの間に式(3)の関係式が成立する。自己相関係数を式(4)のように, 減衰項・振動項の積と減衰項の和の形で近似し, $a=0.3, l=20, l_0=4$ において各Sについて式(2), 式(3)により, $M_2(S)/M_2, M_3(S)/M_3$ を計算した。平均値 $\mu(S)$ は μ と変わらないとして, この $M_2(S), M_3(S)$ を用いて表2・表3の各式より分布パラメータを決定し, 1~99.9 パーセント濃度を求めた。これにより, 図3のように平均化時間Sと3パーセント濃度と平均値の比 $X_{0.9}/\mu$ の関係図(Arrowhead Chart と呼ぶ)が得られる。図3には原データのS時間移動平均値の各パーセント濃度も合わせて示してある(○印)。

IV. おわりに Arrowhead Chart により, 任意の平均化時間の3パーセント濃度を求めることができ, 汚染レベルと影響の関係の究明, 大気汚染制御に有用である。分布型の決定に際して3

次モーメントが与えられてない場合には, 平均値 μ , 分散 M_2 , モード μ を用いて式(5)と表3により分布パラメータが決定できる。水文統計学において, 洪水量・降水量などの水文量の分布あるいはその和の分布を求める研究が行われている。ここでの研究成果は水文統計学の分野へも適用しうらと思われる。

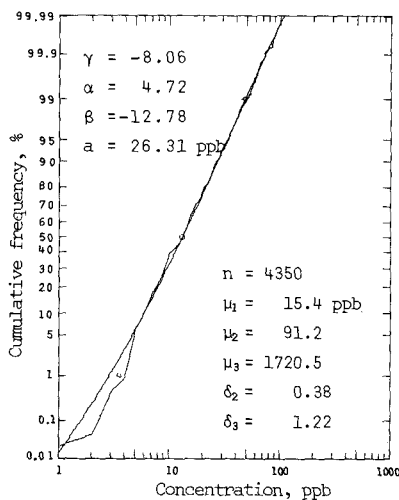


Fig.2 Inspection of conformity of Pearson distribution (type VI) and log-normal distribution; data were taken from January to June 1972 at Misaki.

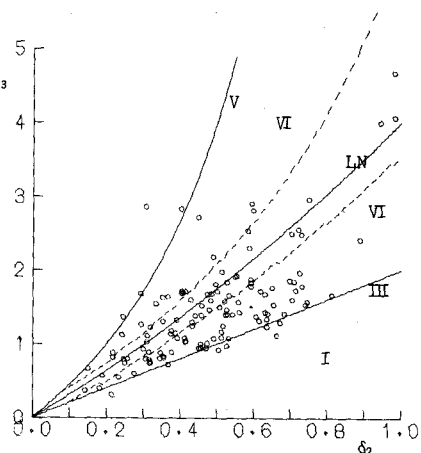


Fig.1 δ_2 - δ_3 diagram for the class of Pearson distributions: dotted curves indicate the range where log normal distribution is available; ○, data of SO_2 at Sakai and Misaki, Osaka.

$$\mu_2(s)/\mu_2 = G(s)/G(1), \quad (2)$$

where

$$G(s) = \frac{2}{s} \int_0^s \left(1 - \frac{t}{s}\right) R(t) dt.$$

$$\mu_3(s)/\mu_3 = H(s)/H(1), \quad (3)$$

where

$$H(s) = \frac{6}{s} \int_0^s \frac{t}{s} \left(1 - \frac{t}{s}\right) R(t) dt.$$

$$R(t) = a \exp\left(-\frac{t}{l}\right) \cos\left(\frac{2\pi t}{l_0}\right) + (1-a) \exp\left(-\frac{t}{l_0}\right) \quad (4)$$

$$\gamma = (2\kappa - \delta_2 - 1) / (\kappa + \delta_2 - 1), \quad (5)$$

where $\kappa = \chi_0 / \mu_1$, $\delta_2 = \mu_2 / \mu_1^2$.

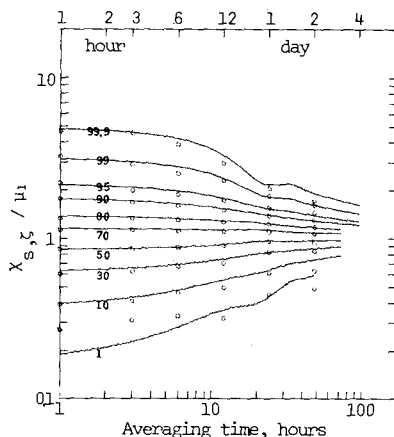


Fig.3 Percentile concentration of various averaging times; ○, data from January to June 1972 at Misaki, Osaka.

- References 1) Larsen R.I. (1969) J. Air Poll. Control Assoc., 19, 24-31. 2) Elderton W.P. (1927) Frequency Curves and Correlation. Harren. 3) Hoadley A.B. (1968) Biometrika, 55, 559-563.