II-225　2次元乱流とそのシュミレーション

中央大学　正会員　林　泰造
○同　上　学生員　山田　正

1. まえがき

近代乱流理論の一つの成果は，相関関数，あるいはスペクトルの関数形を決定した点にあると思われる。それはスペクトルではKormogoroffの−5/3乗則によって代表されている。しかしこの−5/3乗則の成立条件としては，次のものが考えられる。

i)　乱れは局所等方性（locally isotropic）を有する。

ii)　乱れは3次元性を有する。（必要条件ではあるが十分条件ではない。）

この理論により乱流の様々な現象が合理的に説明されて来た。例えばRichardsonによって与えられた拡散係数の4/3乗則はBatchelorによるとスペクトルの−5/3乗則と同等の内容をもっている事がわかった。

しかしながら今考えるスケールを非常に大きく取ると，我々を取巻く地球大気の水平運動や，海洋の大規模運動，あるいは河川水の大規模水平運動，これらは決して上記i)の局所等方性の概念では取扱うことができず又ii)の3次元構造を持っているとも思えないものであり，むしろ，"quasi-two-dimensional"乱流であると考えた方が良いであろう。本研究はこの様な2次元構造をもった乱流のスペクトル形状を決定し，又その様な乱流をコンピューター上でシュミレートし，合せて若干の考察を行ったものである。

2. 解析

(a) 渦子モデルの提案　乱流を種々のスケールで切断して考えるという着想は，Weizsäker，井上によって始ると考えられる。本研究の2次元乱流においてもその様な考えを適用してみる。Batchelor(1969), Kraichnan(1967), Leith(1968)らによると，2次元乱流では渦度の自乗平均値（エンストロフィー）が3次元乱流の速度の自乗平均値（エネルギー）に対応して重要な働きをしていることがわかってきた。よって，今$t=t$での渦度$\omega(t)$を(1)式の如く，各スケールの渦（2次元のeddyより以後"渦子"と呼ぶ）の渦度の和として表してみる。

$$\omega(t) = \omega_0(t) + \omega_1(t) + \cdots\cdots + \omega_n(t) + \cdots\cdots + \omega_\infty(t) \quad (1)$$

ここに　$\omega_0(t)$　；　最大渦子の渦度

$\omega_\infty(t)$　；　最小渦子の渦度

$\omega_n(t)$　；　ランクnの渦子のもつ渦度

次に乱子モデルと同様に，各渦子のもつ代表速度を$U_n(t)$とおき，$\omega(t)$に対応するものとして$t=t$での速度を次の様に表す。

$$U(t) = U_0(t) + U_1(t) + \cdots\cdots + U_n(t) + \cdots\cdots + U_\infty(t) \quad (2)$$

$$= u_0R_0(t) + u_1R_1(t) + \cdots\cdots + u_nR_n(t) + \cdots + u_\infty R_\infty(t) \quad (3)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} u_n R_n(t) \quad (4)$$

ここに，R_n　；平均0，標準偏差1の正規乱数

u_n　；ランクnの渦子のもつ乱れ強さ$u_n=\sqrt{\overline{U_n^2(t)}}$

またここで，ランクnの渦子のもつ寿命時間をτ_n，ランクnの渦子のもつ渦径をL_nによって表す。

(b) エネルギースペクトル　さてランクnの渦子のもつエンストロフィーは次の様に表し得る；

$$\overline{\omega_n^2} = \alpha \overline{U_n^2}/L_n^2 = \alpha u_n^2/L_n^2 \qquad (5)$$

α；定数

又エンストロフィー伝達率（エネルギー逸散率に対応する）ηは各ランクごとに次の様になる。

$$\eta_n = \frac{1}{2}\frac{d\overline{\omega_n^2}}{dt} = \beta\frac{\overline{\omega_n^2}}{\tau_n} = \alpha\beta\frac{u_n^2}{\tau_n L_n^2} \qquad (6)$$

β；定数.

ここで $\tau_n = L_n/u_n$ より(6)式は,

$$\eta_n = \alpha\beta\, u_n^3/L_n^3 = \alpha\beta/\tau_n^3 \qquad (7)$$

今エンストロフィーを各スケールごとに伝達する領域つまりエンストロフィーカスケーディング領域が存在するときは各スケールの$\eta_n = \eta = const.$となるべきである。このとき(7)式より, $\tau_n = \tau_0 = \tau_\infty = const.$となり, 又 $\overline{\omega_n^2} = \overline{\omega_0^2} = \overline{\omega_\infty^2} = const.$となる。このことは各ランクの渦度の強さが等しくなる様に配分されることを示している。よって(7)式より,

$$u_n^3 = \gamma\eta L_n^3 \qquad (8)$$

γ；定数

となる。一方エネルギースペクトル$F(k)$は(8)式の関係を用いて次の様に示される。

$$F(k) \sim u_n^2 L_n \sim \eta^{2/3} L_n^3 \sim \eta^{2/3} k^{-3} \qquad (9)$$

よって2次元乱流のエネルギースペクトルは次の(10)式で表される。

$$F(k) = C\eta^{2/3}k^{-3} \qquad (10)$$

Kraichnan (1971) によると定数 $C = 2.626$ である。

(c) 拡散係数　次にエネルギースペクトルが(10)式の如く−3乗則で表されるとき，これに対応して拡散係数Kは，(8)式を用いると，

$$K \sim u_n L_n \sim \eta^{1/3} L_n^2 \qquad \text{よって}$$

$$K = A\eta^{1/3}L^2 \qquad (11)$$

ここにA；定数，L；拡散巾

(11)式はRichardsonの4/3乗則とは異った2乗則を導き，この結果はJ.T. Lin (1971)によって導かれたものと同じ結果を与えている。

(d) シュミレーション　次に2次元乱流のシュミレーションを行う。今次の2つの量を導入すると；

$\overline{U}$；場の平均流速

T_n；ランクnの渦子の通過時間

このとき定義より，

$$T_n = L_n/\overline{U}, \quad \tau_n = \tau_0 = \tau_\infty = L_n/u_n = const \qquad (12)$$

(12)式より，

$$u_n/u_0 = L_n/L_0 = T_n/T_0 \qquad (13)$$

一方乱子モデルでは，$u_n/u_0 = (T_n/T_0)^{1/3}$ となっている。これらは全てEuler的記述内容である。

さらに(13)式を(4)式に代入すると，

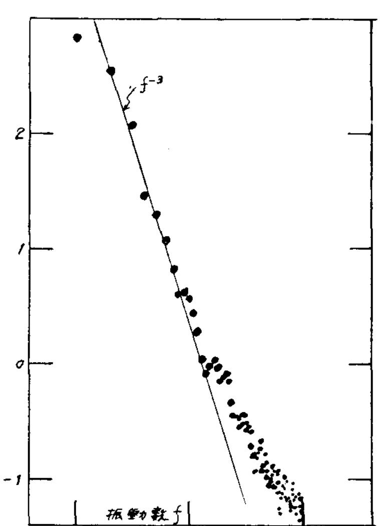
$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_0 (L_n/L_0) R_n(t) \qquad (14)$$

となり，この様にして作り出された乱れ速度を用いてエネルギースペクトルを計算したものが下図である。

予想通り低周波域では−3乗則を示しているが，高周波域で若干−3 Lawからずれている。このことは今後の研究にゆだねたい。

3. 考察　(10),(11)で表される結果は，実際の大気の大規模運動に関する観測[5]によって実証されており，そのスケールは数10km〜数1000kmにおいてみられる。又河川においても余越[6]はスペクトルの−3乗則らしきものを見い出している。

4. 参考文献 (1) Batchelor, G.K., 1969 Phys. Fluids, suppl. II, 12. (2) Kraichnan, R.H., 1967, Phys. Fluids, 10. (3) Leith, C.E., 1968, Phys. Fluids 11. (4) Lin, J.T., 1971, NCAR manuscript MS. (5) Morel, P., and Larcheveque, M., 1974, J. Atmos. Sci., 31. (6) 余越正一郎, 1974, 第30回年講. (7) 日野幹雄, 1965, Trans. of JSCE, no.123. (8) 井上栄一, 1952, 農業技術研究所報告, A, 2. (9) Weigsäker, C.F. von, 1948, Z. Phys., 124.



エネルギースペクトル