

乱流状態の流れに含まれる種々のスケールの乱れは、平均流により下流側へと運ばれつつ、より小さなスケールのものへと変形される。このような乱れの移流過程の特性は移流速度と寿命時間との2量によって記述されるが、移流速度については、エネルギー・スペクトルについての波数表示と周波数表示との対応性よりスケールの大きさにほとんど関係なく局所的平均速度に一致することがすでに示されているため¹⁾、本報告では寿命時間について、Buckinghamの π 定理を用いた次元解析的考察により、若干の検討を行う。

1. エネルギー・スペクトル $S(k)$

まず最初に波数表示のエネルギー・スペクトル $S(k)$ の相似則について考える。すでによく知られているように、 $S(k)$ はレイノルズ応力の効果により平均流の運動エネルギーが乱れエネルギーへと交換される大スケールの生成領域、流体運動の非線型(慣性)効果により大きなスケールから小さなスケールへと乱れエネルギーが伝達される中間スケールの慣性領域、および流体の粘性効果により乱れエネルギーが熱エネルギーへと逸散される小スケールの粘性領域の3領域でそれぞれ異なる特性を示す。たとえば、生成領域での $S(k)$ は、相関関数との関係より知れるように、乱れの強さ u' と平均スケール L との2量によって規定されるのに対し、慣性領域ではエネルギー・逸散率 ε および波数 k の2量、粘性領域では ε 、 k および動粘性係数 ν の3量によって規定されることがKolmogorovの相似則としてよく知られている。

したがって、生成領域については u' および L の2量、慣性および粘性領域については ε および k の2量を基本量として選び、Buckinghamの π 定理を用いた次元解析の手法により、各領域での $S(k)$ を規定する無次元量を求めると、表に示されるようなものが得られる。表にみられるように、生成および慣性領域についての無次元量は1種であり、たとえば慣性領域の $S(k)$ に関する $-5/3$ 乗則が容易に導かれる。これに対し粘性領域については2種の無次元量が存在し、無次元量間の関係は次元解析的考察によっては決定されないためこの領域の相似則にはかなりのあいまいさが残されるが、 ν が十分大きな場合の $S(k)$ は近似的に0とみなせることより、無次元化動粘性係数 $\nu_* = \nu / \varepsilon^{1/3} k^{-4/3}$ がそれほど小さくないかぎり無次元化エネルギー・スペクトル $S(k) / \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$ は ν_* の-1乗に比例すると仮定すれば井上²⁾らによる -3 乗則が導かれ、また -4 乗に比例すると仮定すればHeisenberg³⁾らの -7 乗則が導かれ、粘性領域は第1粘性領域および第2粘性領域の2種に区別されることが知れる。

2. コヒーレンシ $\text{Coh}(x; k)$ および寿命時間 $T_L(k)$

上述の手法を用いて、流れ方向に x だけ離れた2点における乱れ速度間のコヒーレンシ $\text{Coh}(x; k)$ の相似則について考えてみよう。 $\text{Coh}(x; k)$ はそれぞれの領域に対応する $S(k)$ の規定量のほかさらに x および移流速度 U_0 の加わったものによって定められるとすると、各領域の $\text{Coh}(x; k)$ を規定するものとして表に示されるような無次元量が得られる。

したがって、 $U_0 \rightarrow \infty$, $x, \nu \rightarrow 0$ の場合 $\text{Coh}(x; k) \rightarrow 1$ 、逆に $U_0 \rightarrow 0$, $x, \nu \rightarrow \infty$ の場合 $\text{Coh}(x; k) \rightarrow 0$ となることを考慮すると、各領域の $\text{Coh}(x; k)$ についての相似則としてつぎのものが得られる。

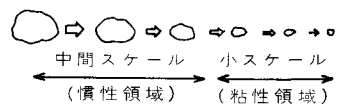
3 波数領域のスペクトル特性を規定する基本量および無次元量

領域	基本量	$S(k)$	$\text{Coh}(x; k)$	$T_L(k)$
生成	u', L	$\frac{S(k)}{u'^2 L}$	$\text{Coh}(x; k), \frac{U_0}{u'}, \frac{x}{L}$	$\frac{T_L(k)}{u'^{-1} L}$
慣性	ε, k	$\frac{S(k)}{\varepsilon^{2/3} k^{-5/3}}$	$\text{Coh}(x; k), \frac{U_0}{\varepsilon^{1/3} k^{-1/3}}, \frac{x}{k^{-1}}$	$\frac{T_L(k)}{\varepsilon^{-1/3} k^{-2/3}}$
粘性	ε, k	$\frac{S(k)}{\varepsilon^{2/3} k^{-5/3}}, \frac{\nu}{\varepsilon^{1/3} k^{-4/3}}$	$\text{Coh}(x; k), \frac{U_0}{\varepsilon^{1/3} k^{-1/3}}, \frac{\nu}{\varepsilon^{1/3} k^{-4/3}}, \frac{x}{k^{-1}}$	$\frac{T_L(k)}{\varepsilon^{-1/3} k^{-2/3}}, \frac{\nu}{\varepsilon^{1/3} k^{-4/3}}$

(a) 不連続的変形



(b) 連続的変形



乱れの変形過程

$$\text{生成領域: } \{1 - \text{Coh}(x; k)\} \sim \frac{u' x}{U_0 L} \quad (1)$$

$$\text{第1粘性領域: } \{1 - \text{Coh}(x; k)\} \sim \frac{v k^2 x}{U_0} \quad (3a)$$

$$\text{慣性領域: } \{1 - \text{Coh}(x; k)\} \sim \frac{\varepsilon^{1/3} k^{2/3} x}{U_0} \quad (2)$$

$$\text{第2粘性領域: } \{1 - \text{Coh}(x; k)\} \sim \frac{\varepsilon^{-1} v^4 k^6 x}{U_0} \quad (3b)$$

あるいは

$$\text{生成領域: } \text{Coh}(x; k) \sim \frac{U_0 L}{u' x} \quad (4)$$

$$\text{第1粘性領域: } \text{Coh}(x; k) \sim \frac{U_0}{v k^2 x} \quad (6a)$$

$$\text{慣性領域: } \text{Coh}(x; k) \sim \frac{U_0}{\varepsilon^{1/3} k^{2/3} x} \quad (5)$$

$$\text{第2粘性領域: } \text{Coh}(x; k) \sim \frac{U_0}{\varepsilon^{-1} v^4 k^6 x} \quad (6b)$$

(1)~(3)は $\text{Coh}(x; k)$ と x との関係を、また(4)~(6)は $\text{Coh}(x; k)$ と k との関係を知るのに適している。すなわち、(1)~(3)より $\text{Coh}(x; k)$ はいずれの領域についても x が増加するにしたがって直線的に減少し、乱流場を構成するすべての波数成分を対象とした通常のラグランジュ的相関係数に類似したものとなる。なお、 x の増加に伴う $\text{Coh}(x; k)$ の減少の度合いは生成領域では k に無関係に一定であるが、慣性および粘性領域では k の増加に伴って著しくなり、前者では $k^{2/3}$ 、後者では k^2 あるいは k^6 に比例することが知れる。また、(4)~(6)より知れるように x が一定のもとでの $\text{Coh}(x; k)$ は k の小さな領域では一定値を示すが、 k が大きくなるにしたがって、慣性領域では $k^{-2/3}$ 、粘性領域では k^{-2} あるいは k^{-6} に比例して、急激に減少する。

以上に示された $\text{Coh}(x; k)$ に関する相似則の誘導過程において、ある無次元化量の0という値に対して、 $\{1 - \text{Coh}(x; k)\}$ あるいは $\text{Coh}(x; k)$ もまた0となる場合、両者の関係は1次的と近似されているが、第2粘性領域の動粘性係数については、 $S(k)$ についての場合と同様に、4次的と近似されている。このような誘導過程より明らかなように、ここに示された相似則の成立性は無次元量の大きさに依存し、適用限界についてはさらに詳細な検討が必要である。

つぎに、寿命時間 $T_L(k)$ について考えると、一般に、 $T_L(k)$ は $\text{Coh}(x; k)$ の x について $0 \sim \infty$ までの積分値(寿命距離に相当する)と移流速度 U_0 との比として表わされるが、 $\text{Coh}(x; k)$ として(1)~(3)を用いるとともに、積分の上限値を $\text{Coh}(x; k)$ が0となる x の値に置き換えると、 $T_L(k)$ に対するつぎの相似則が得られる。すなわち、

$$\text{生成領域: } T_L \sim \frac{L}{u'} \quad (7) \quad \text{第1粘性領域: } T_L(k) \sim v^{-1} k^{-2} \quad (9a)$$

$$\text{慣性領域: } T_L(k) \sim \varepsilon^{-1/3} k^{-2/3} \quad (8) \quad \text{第2粘性領域: } T_L(k) \sim \varepsilon^{-1} v^{-4} k^{-6} \quad (9b)$$

なお、これら関係式を、 $T_L(k)$ が $S(k)$ についてと同じ量によって規定されとした次元解析より、直接得ることも可能である。

(7)~(9)に示された $T_L(k)$ についての相似則よりつぎの事項が知れる。すなわち、生成領域の $T_L(k)$ は k に関係しないことより、大スケールの乱れは移流に伴って徐々に小スケールのものへと変形されるのではなく、ある一定寿命時間のうちに急激に別のスケール、たとえば乱流場を構成する乱れの平均スケール程度の乱れへと変形されるものと考えられる。一方、慣性および粘性領域の $T_L(k)$ は k に関係することから、移流に伴いつぎからつぎへと小スケールのものへと変形されるが、前者の $T_L(k)$ は $k^{-2/3}$ 、後者の $T_L(k)$ は k^{-2} あるいは k^{-6} に比例することより知れるように、 k の大きなものほど寿命時間は短くなっている。このような $T_L(k)$ の特性にもとづき、移流に伴う乱れの変形過程を模式的に示すと図のようになり、生成領域での特性は自由表面上に一樣にまかれたトレーサがある時間経過すると、ほぼ一樣なしま模様を描くという事実をよく説明しているように思われる。なお、(8)に示された $T_L(k)$ の特性は、すでに井上⁴⁾によって示されたのと一致している。

以上は乱れの移流過程を特性づける寿命時間の相似則について単純な次元解析的検討より得られた結果を示したものであって、その適用性については高精度の詳細な実験的検討が必要である。

参考文献

- 1) 今本博健：開水路流れにおける乱れの位相速度について，土木学会関西支部年講，Ⅱ-13，1971。
- 2) 井上栄一：乱れの最小乱子について，東大理工研報告，4，pp. 194~200，1950。
- 3) Heisenberg: Zur Statistischen Theorie der Turbulenz, Zeit. Phys., 124, 1948.
- 4) 井上栄一：地表風の構造，農業技術研究所報告，A2，1952。