

九州産業大学 正会員○加納正道
九州産業大学 同 崎山正常
九州産業大学 大学院 細川土佐男

1. まえがき 湾域汚染問題を扱う方法として拡散方程式の数値解析と実験を同時に取りあげる必要性を前報に述べている。本報は汚濁物質拡散現象を数値解析し、その結果が実験結果とよく一致するよう研究を進めてきたこれまでの結果よりえられた若干の知見を整理したものである。

2. 現象と基礎方程式 実験装置は図-1(a)に示されている。汚濁物質として色素を河口部より潮汐の影響を考えて一定時間(ほぼ5分)周期で放流する。放流開始時間以前に流出した色素は、放流停止時間内に河口附近より移流拡散しており、河口一帯は清澄になる。清澄海域へ高濃度の色素が流出し、大きな濃度差を保って時々刻々ひろがる。このひろがる様子を図-1(a)、図-2(a)および図-3(a)に等濃度線で示している。次に簡単のために一次元の場合の基礎方程式について述べれば、実験終了時間数十分の間の色素の自己減衰は少なく沈降性も無視できるので移送と拡散が卓越する $\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial(uc)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) \dots \dots (1)$ となる。

これを数値解析するには格子に分割して差分方程式を解くことになるが、格子間隔(以後 Δx と記す)数の2乗に比例して計算容量が増加するので、 Δx を充分小さくすることはできない。(1)式では高次微分項が無視できる充分小さい Δx で表現するのに対し、数値解析においては、電子計算機の制限から最小 Δx がきめられる。湾域汚染の解析では広範囲を取り扱うので Δx はかなり大きくするのが普通である。われわれの装置では66cmとしている。図-1(a)~図-3(a)に示すように汚染境界では一つの Δx 間に等濃度線が数本入っており、この Δx 間を2次微分項以上を省いた1次微分だけであらわすことにはかなりの無理が生じよう。そこで高次微分項の効果を吟味するために3次微分項まで考えた拡散の基礎式を求めてみよう。図-4のように $\Delta x \Delta y$ の矩形をとり汚染物質の連続の式を作る。1次元拡散であるので $U=一定$, $V=0$ とすれば、 $D_x=0$, $D_y=一定$ となるので、AB面より平均流により $(UC)dy$ だけ輸送され、AA'面をぬれのために単位時間に輸送される量は $\left[-D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + D_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \right] (dx)$ であるので、各辺を通る汚染物質の量は図-4に示すようになる。したがってAB, AA'面を通じて矩形内に入ってくる量 $(UC)dy + \left[-D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + D_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \right] (dx)$ と、A'B', BB'面を通じて出ていく量 $\left\{ UC + \frac{\partial}{\partial x} (UC)(dx) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (UC)(dx)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} (UC)(dx)^3 \right\} dy$ $+ \left[-D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + D_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \right] (dx) + \frac{\partial}{\partial y} \left[-D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + D_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \right] (dx) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[-D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + D_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \right] (dx)^2$ $+ \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \left[-D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + D_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \right] (dx)^3 \right\} (dx)$ との差が濃度の時間変化を構成する。したがって

$$\frac{\partial c}{\partial t} = - \left\{ U \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} (dx) + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 c}{\partial x^3} (dx)^2 \right\} + \left\{ D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{D_y}{12} \frac{\partial^3 c}{\partial y^3} (dy) + \frac{D_y}{36} \frac{\partial^4 c}{\partial y^4} (dy)^2 \right\} \dots \dots (2)$$

が成立する。 A_1 A_2 A_3 B_2 B_4 B_6

3. 差分表示と解析方法 (2)式右辺の各項を $A_1, A_2, A_3, B_2, B_4, B_6$ と名づけて、これらを差分表示すれば、

$$A_1 = -\left(\frac{U}{\Delta x}\right)(C_{i+1} - C_i) \text{ (但し } U < 0 \text{ の場合)}, A_2 = -\left(\frac{U}{2\Delta x}\right)(C_{i+1} - 2C_i + C_{i-1}), A_3 = -\left(\frac{U}{6\Delta x}\right)(C_{i+1} - 3C_{i+1} + 3C_{i-1} - C_{i-2}), B_2 = \left(\frac{D_y}{\Delta y^2}\right)(C_{i+1} - 2C_i - C_{i-1})$$

$$B_4 = \left(\frac{D_y}{12\Delta y^3}\right)(C_{i+1} - 4C_{i+1} + 6C_i - 4C_{i-1} + C_{i-2}), B_6 = \left(\frac{D_y}{36\Delta y^4}\right)(C_{i+1} - 6C_{i+1} + 15C_{i+1} - 20C_i + 15C_{i-1} - 6C_{i-2} + C_{i-3}) \dots \dots (3) \text{ となる。}$$

これらの各項のオーダーを調べるために、距離 Δx 間の濃度差を模式的にあらわしたものが図-5である。汚染濃度を等濃度線で図-1(a), (b) ~ 図-3(a), (b)のように示した場合、汚染域と清澄域の境界では濃度勾配は小さく、 Δx 間の濃度勾配は2次以上の高次曲線で示されよう。また汚染中部域では濃度勾配は小さく、 Δx 間の濃度勾配はほぼ直線で示されよう。そして、(2)式のように高次微分項をとることは、 Δx 間を曲線変化とみなすのであるから、(3)式の差分点 $i+3, i+2, \dots, i, \dots, i-3$ は図-5下部に示すように、すべて Δx 内にとることになる。図-5によって、(2)(3)式の各項を算出したものを表-1に示している。移送項についてみると、 A_1 は+1.0で、 A_2 は-0.250~-0.485, A_3 は-0.036~-0.078であり、 A_2 および A_3 が A_1 の補正項になっている。この補正値からみて、濃度勾配を直線とみなしえない領域にお

いては、2次項(A₂)の導入が必要であろう。一方拡散項ではB₄、B₆ともに無視できる量であり、2次項(B₂)のみで解析してもよいであろう。そこで、(2)式は $\frac{\partial C}{\partial t} = -U \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{U}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$ ……(4) となる。ここに、右辺第2項2次移送項はΔx内において解析すべきであるから、上式を差分化し、

$(C_{i+1}^{k+1} - C_i^k) / \Delta t = -\frac{U}{\Delta x} (C_{i+1}^k - C_i^k) - \frac{U}{2\Delta x} (C_{i+1}^k - 2C_i^k + C_{i-1}^k) + \frac{D_y}{(\Delta y)^2} (C_{i+1}^{k+1} - 2C_i^{k+1} + C_{i-1}^{k+1})$ (但しU<0) ……(5) として、数値解析すれば、解析過程ではΔx内の濃度は表示できないので2Δxへだてに隣接2格子間で差分をとる結果となり、2次移送項の定義と異なった解析をしてしまう。そこで筆者らは、数値移送係数 $C_{N,x,i} = -\frac{U\Delta t}{2\Delta x} (1 + \frac{U\Delta t}{\Delta x})$ (但しU<0) を定義し、これを1次移送項で補正することを試み、 $C_{i+1}^{k+1} - C_i^k = -(\frac{U\Delta t}{\Delta x} - C_{N,x,i}) (C_{i+1}^k - C_i^k) + \frac{D_y \Delta t}{(\Delta y)^2} (C_{i+1}^{k+1} - 2C_i^{k+1} + C_{i-1}^{k+1})$ (但しU<0) ……(6) により解析している。これによる解析結果を図-1(b)、図-2(b)、図-3(b)に示す。

解析結果は実験結果によって検証されたと言えよう。

4. おまけ 湾域汚染問題の拡散数値解析においては格子間隔がかなり大きくなるので、拡散解析の基礎式として移送項の2次微分項をもりこんだ(4)式を採用すべきである。しかし、実際の数値解析の過程ではこれに変わる数値移送係数を定義導入して、1次移送項により(6)式の形で解析する。

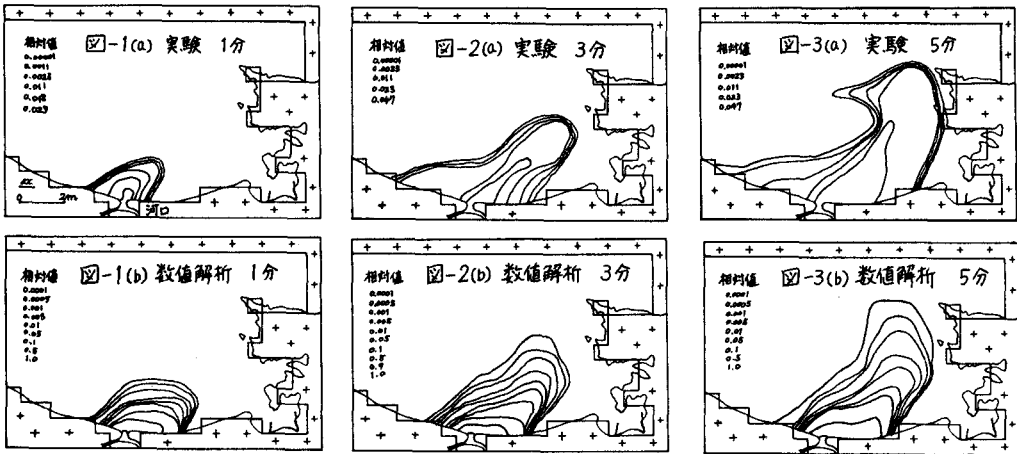


図-4

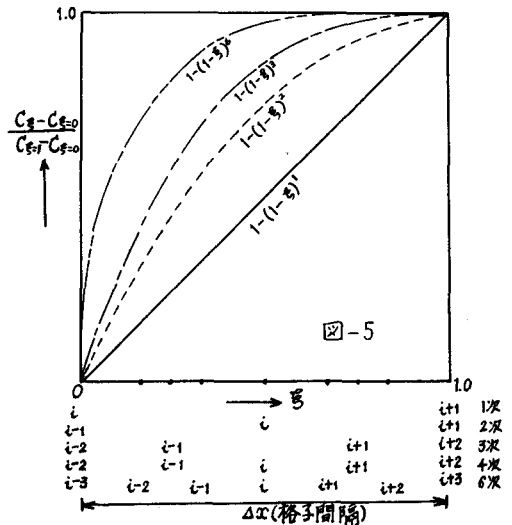
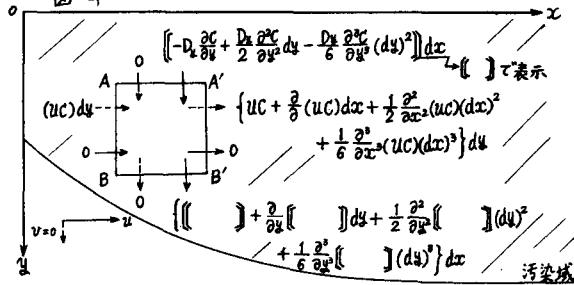


図-5

参考文献

- 1) 加納, 崎山: 拡散係数についての二つの考察, 49年度 土木学会西部支部年報 P111
- 2) 加納, 崎山: 拡散模擬実験についての二つの考察, 50年度 土木学会年報 II部 P498
- 3) 加納, 崎山: 汚染物質拡散の数値計算について, 50年度 土木学会西部支部年報 P109
- 4) 建設省関東地方研究所: 東京湾汚濁調査, 昭和46年度 P206
- 5) 堀口, 海男: 汚染物質拡散の数値解法について, 第16回 海岸工学講演集 1969年 P188
- 6) 橋本, 龍夫: 水理学演習, 森北出版 上巻 P112

表-1

A _{ij}	次数	6 3 2 1			
		1.0	1.0	1.0	1.0
A ₁	$-U/\Delta x \times$	1.0	1.0	1.0	1.0
A ₂	"	-0.495	-0.375	-0.250	0
A ₃	"	-0.078	-0.036	0	0
B ₂	$D_y/(\Delta y)^2 \times$	-0.495	-0.375	-0.250	0
B ₄	"	-0.026	0	0	0
B ₆	"	-0.008	0	0	0