

混合を考慮した二層一次元不定流について、運動量およびエネルギーの関係と適用して解析を行う。下層密度 ρ_2 と一定とすれば、上層密度 ρ_1 、上下層の流速 u_1, u_2 (または Q_1, Q_2) および水深 h_1, h_2 の5個の未知量に対して、基礎式

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial Q_1}{\partial x} = E \quad (1), \quad \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial Q_2}{\partial x} = -E \quad (2), \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 h_1) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 Q_1) = \rho_2 E \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 Q_1) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 u_1 Q_1) + \int_h^s \rho \frac{\partial p}{\partial x} dz - \frac{1}{B} \int_h^s \rho dz \frac{\partial B}{\partial x} + \tau_1 B + 2\tau_{s1} h_1 = 0 \quad (4), \quad \rho_2 \frac{\partial Q_2}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial}{\partial x} (u_2 Q_2) + \int_b^h \rho \frac{\partial p}{\partial x} dz - \frac{1}{B} \int_b^h \rho dz \frac{\partial B}{\partial x} + (\tau_2 - \tau_1) B + 2\tau_{s2} h_2 = 0 \quad (5)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{u_1}{g} \frac{\partial u_1}{\partial x} + i_{f1} - i_o = 0 \quad (6), \quad \frac{1}{g} \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (1-E) h_1 + \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{u_2}{g} \frac{\partial u_2}{\partial x} + i_{f2} - i_o = 0 \quad (7)$$

が成立つ。水路は直線状にて漸変流を仮定している。(1)および(2)式は体積の連続条件。(3)式は質量の連続条件。

(4)および(5)式は運動量式。(6)および(7)式はエネルギー式と表わす。上層密度分布として、

一様流速、一定水深かつ一定の拡散係数を与えたときの拡散方程式の解^{2,0}を仮定するとき、

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_2 - \rho_0} = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2s+1} e^{-\frac{(2s+1)^2 \pi^2 K}{2} \sin \frac{2s+1}{2} \pi \left(\frac{z'}{h_1} \right)}, \quad d = \frac{\rho_2}{2} - \frac{16(\rho_2 - \rho_0)}{\pi^3} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(2s+1)^3} e^{-\frac{(2s+1)^2 \pi^2 K}{2} \sin \frac{2s+1}{2} \pi \left(\frac{z'}{h_1} \right)} \quad (9)$$

$$\beta = \frac{4(\rho_2 - \rho_0)}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2s+1} e^{-\frac{(2s+1)^2 \pi^2 K}{2} \sin \frac{2s+1}{2} \pi \left(\frac{z'}{h_1} \right)} \quad (10)$$

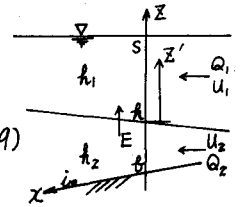


図-1

とすれば、運動量の関係から得られる水深の勾配は(1)~(5)式および(9)式より、微少項を省略したかたちとして、

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{1}{\Xi_M} \left[\frac{h_1 + h_2}{E g h_1 h_2} \frac{\tau_1}{\rho_2} + \frac{1}{E g h_2} \frac{\tau_2}{\rho_2} - \frac{2}{E g B} \frac{\tau_{s1}}{\rho_2} + \frac{2}{E g B} \frac{\tau_{s2}}{\rho_2} - F_2^2 i_o + \left\{ \left(1 - \frac{\beta \sqrt{\pi K}}{\rho_2 - \rho_0} - 2F_1^2 - 2 \frac{u_1}{u_2} F_2^2 \right) \frac{E}{u_1} + (h_1 F_1^2 - h_2 F_2^2) \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{u_1} F_1^2 \frac{\partial h_1}{\partial t} - \frac{2}{u_2} F_2^2 \frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{1}{E g h_1 B} \frac{\partial Q_1}{\partial t} + \frac{1}{E g h_2 B} \frac{\partial Q_2}{\partial t} - \left(1 - \frac{\beta \sqrt{\pi K}}{\rho_2 - \rho_0} \right) \frac{h_1}{E u_1 \rho_2} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right\} \right] \quad (11)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x} = \frac{1}{\Xi_M} \left[\frac{(2d/\beta) h_1 + h_2}{E g h_1 h_2} \frac{\tau_1}{\rho_2} - \frac{(2d/\beta) \tau_2}{E g h_2 \rho_2} + \frac{2}{E g B} \frac{\tau_{s1}}{\rho_2} - \frac{2(2d/\beta) \tau_{s2}}{E g B \rho_2} + \left(2 + \frac{(2d/\beta) - 1}{E} - F_1^2 \right) i_o - \left\{ \left(\frac{2d}{\rho_2} - \frac{\beta \sqrt{\pi K}}{\rho_2 - \rho_0} \right) - 2F_1^2 - \frac{4d}{\rho_2} \frac{u_1}{u_2} F_2^2 \right\} \frac{E}{u_1} \right. \\ \left. - (h_1 F_1^2 - \frac{2d}{\rho_2} h_2 F_2^2) \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{2}{u_1} F_1^2 \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{(4d/\beta) F_2^2 \partial h_2}{u_2} + \frac{1}{E g h_1 B} \frac{\partial Q_1}{\partial t} - \frac{(2d/\beta) \partial Q_2}{E g h_2 B} + \left(\frac{2d}{\rho_2} - \frac{\beta \sqrt{\pi K}}{\rho_2 - \rho_0} \right) \frac{h_1}{E u_1 \rho_2} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right] \quad (12)$$

$$\Xi_M = \left\{ 2 + (2d/\beta - 1)/E \right\} - F_1^2 - (2d/\beta) F_2^2 \quad (13)$$

が得られる。(2d/β) = 1 - 4/3 E, β√πK/(ρ₂ - ρ₀) = 2/3 とすれば、上層の密度分布を直線と仮定した場合と一致する。

エネルギーの関係式から同様の計算を行うと、(1)~(3)式および(6)~(7)式より、微少項を省略したかたちとして、

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{1}{\Xi_E} \left[-\frac{i_{f1} - i_{f2}}{E} - F_2^2 i_o + (1 - F_1^2) \frac{u_1}{u_2} F_2^2 \frac{E}{u_1} + (h_1 F_1^2 - h_2 F_2^2) \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{2}{u_1} F_1^2 \frac{\partial h_1}{\partial t} - \frac{2}{u_2} F_2^2 \frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{1}{E g h_1 B} \frac{\partial Q_1}{\partial t} + \frac{1}{E g h_2 B} \frac{\partial Q_2}{\partial t} - \frac{h_1}{E u_1 \rho_2} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right] \quad (14)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x} = \frac{1}{\Xi_E} \left[\frac{i_{f1} - i_{f2}}{E} + (1 - F_1^2) i_o - (1 - F_1^2) \frac{u_1}{u_2} F_2^2 \frac{E}{u_1} - (h_1 F_1^2 - h_2 F_2^2) \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{2}{u_1} F_1^2 \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{2}{u_2} F_2^2 \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{1}{E g h_1 B} \frac{\partial Q_1}{\partial t} - \frac{1}{E g h_2 B} \frac{\partial Q_2}{\partial t} + \frac{h_1}{E u_1 \rho_2} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right] \quad (15)$$

$$\Xi_E = 1 - F_1^2 - F_2^2 \quad (16)$$

が得られる。定常流で下層流速 u_2 が十分小さいときは、(14)式および(15)式より、

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{1}{E(1 - F_1^2)} \left\{ - (i_{f1} - i_{f2}) + E(1 - F_1^2) \frac{E}{u_1} + \frac{u_1^2}{g B} \frac{\partial B}{\partial x} \right\} \quad (17)$$

となり、定常流の塩水くさびに関する解析結果^{2,0}と一致する。運動量式とエネルギー式はベクトル量とスカラー

量の相違が基本であるが、漸変流で分布係数と1とするとほとんど似た結果が得られる。ただし、緩混合流では運動量式の方が密度分布の効果と適切に表現しうる利点を有する。特性曲線は4本存在するが、うち1本は他の1本とほとんど重なり、微少項を省略した結果として

$$C_1 = \frac{U_1 + U_2}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{g(h_1 + h_2)}, \quad C_2 = \frac{U_1 + U_2}{2}, \quad C_3 = C_4 = \frac{U_1 + U_2}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{g(h_1 + h_2)} \quad (18)$$

が得られる。攪乱の外で計算するとすると、下流から上流に向けて計算する方がとるべきとすることが出来る。なお、安定条件のみから Δt を小さくすることは物理的意味づけに疑問が生じることとなる。

水面勾配について、運動量およびエネルギーのそれぞれの関係式から求めると、ほぼ似た関係が得られる。あらかじめ省略の行われた(14)式および(15)式から計算すると水面勾配がゼロとなることからわかるように、水面勾配は非常に小さい。そこで、エネルギー式から微少項の省略のない関係として求めると、

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial x} - i_0 = \frac{1}{(1-F_1^2 - F_2^2 + E F_1^2 F_2^2)} \left[-(1-F_2^2) i_f + F_1^2 i_f - E F_1^2 F_2^2 i_0 - \left(\frac{U_1}{U_2} - 1 \right) E F_1^2 F_2^2 \frac{E}{U_1} + \left\{ h_1 F_1^2 (h_1 + h_2) F_1^2 F_2^2 \right\} \frac{E}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \right. \\ \left. + (1-F_2^2) \frac{2U_1}{g h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x} - F_1^2 \frac{2U_2}{g h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{1-F_2^2}{g h_1 B} \frac{\partial Q_1}{\partial t} + \frac{F_1^2}{g h_2 B} \frac{\partial Q_2}{\partial t} - F_1^2 \frac{h_1}{U_1 F_2} \frac{\partial F_1}{\partial t} \right] \quad (19)$$

となる。いっぽう一層流について、簡単のため密度一定(ρ)とし、 $F = U/\sqrt{g(h_1 + h_2)}$ 、 $U = (Q_1 + Q_2)/B(h_1 + h_2)$ とすれば、

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{1-F^2} \left[-i_f + F^2 i_0 + F^2 \frac{h_1 + h_2}{B} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{2U}{g(h_1 + h_2)} \frac{\partial}{\partial t} (h_1 + h_2) - \frac{1}{g(h_1 + h_2)B} \frac{\partial}{\partial x} (Q_1 + Q_2) \right] \quad (20)$$

が得られる。(19)式と(20)式とでは各項は外見上似ている。さらに、下層流速 U_2 が小さいとすると一層似てくる。一層流と二層流とでは、密度分布と密度勾配の影響、摩擦項および境界条件の表現の相違のほか、平均流速と全水深の効果などにより、一層流計算では実際の現象に比し、ゆるやかな結果を与える。特に河口付近においてその傾向が顕著である。たとえば、河口付近の河川水位が海の潮位より低下することがあるが、一層流解析では定性的に同様の傾向がみられても、実測水位よりなお高い水位を算出することが多い。このとき、 h_2 にみられる水深の増大と共に誤差が大きくなり、ヘドロの流送などでは流向が問題となるので一層流解析の不適合性が増大する。

二層流では水面勾配に比し、上下層の水深勾配がそれぞれ反対方向の大きな値を示す。特に、順流時の河口付近、および塩水遡上時の先端付近の上層水深変化は大きい。オーダー的にみると摩擦項の影響はかなりある。逆流時には U_2 が負の大きな値をとるので、河床の摩擦を重視する必要がある。このとき河床勾配の影響を無視しない。 $\partial h_2/\partial x$ には $-F_2^2 i_0$ のオーダーで効いてくる。河口付近は河床勾配の変化の大きい場所である。河口で逆勾配になっているとすると、上潮時に砂州地点までは容易に海水が達するが、それより上流には遡上しにくくなる。このことは河道の中の浅瀬についても同様のことがいえる。また、河口を勾配をつけてしゅんせつする場合には上潮時には海水が容易に侵入する。引潮時には下層流速は小さくなるので河床勾配の影響は小さくなる。塩水がくさび状に侵入するとき、その先端位置は h_2 で検出する。この位置の変動は潮位変動に対しかなり顕著な時間のおくれを伴う。遡上時には $\partial h_2/\partial x$ は負の大きな値となり、下層塩水の混入現象も激しい。これに対し、引潮時には下層塩水は河床にへばりつく状態で残り $\partial h_2/\partial x$ は小さな値となる。上層に混入した塩分濃度はフラッシュされ急激に減少する。下層流速は小さく、内部境界面に近い部分の塩水が上層流によって削りとられるようにして下層水深が減少し、くさびが後退する現象もみられる。このような実験実測結果、および計算結果については別途報告の予定である。また、この現象は非常に三層流的性格が強いが、三層流の不定流解析についても別途報告の予定である。なお、実際の河川の場合には、河口条件を定める方程式、横断形状の影響および先端付近で下層塩水濃度が減少する現象について考慮しておくことが必要である。

[参考文献] 1) 須賀 隆三: 塩水くさびにおける混合の評価

土木学会年次講演会 S.50

2) 須賀 高橋: 混合を考慮した河口からの塩水くさびの遡上

水理講演会 S.49