

東京工業大学 正会員 福田捷二
日本下水道事業団 正会員 石田 貴

まえがき Falco¹⁾ は 流水の可視化から境界層の代表渦はキコ状の渦輪であることを見出した。Sutherland²⁾ は 境界層の乱れをピストンの運動によってつくられる渦輪からなる pulsating jet をモデル化し、pulsating jet と底面の砂粒子の浮遊限界の関係を実験的に調べた。本研究は、開水路底面からの砂粒子浮上がこの渦輪によって誘起される流れに起因するものと考え、粒子の浮遊限界について Sutherland の実験値を用いて考察を試みた。

理論解析 図-1に示すように循環 Γ の渦輪が底面に近づく時、P点に生ずる速度は、渦輪の径 D が不変であると仮定すると、Biot-Savart の法則と鏡像の原理から次式で表わされる。

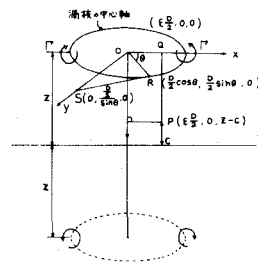


図-1 境界付近の渦輪モデル図

$$v_x = \frac{\Gamma}{\pi D} \left(\frac{z-c}{D} \right) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta \cdot d\theta}{\{(\varepsilon - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta + 4 \left(\frac{z-c}{D} \right)^2\}^{\frac{3}{2}}} + \frac{\Gamma}{\pi D} \left(\frac{z+c}{D} \right) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta \cdot d\theta}{\{(\varepsilon - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta + 4 \left(\frac{z+c}{D} \right)^2\}^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

$$v_z = \frac{\Gamma}{2\pi D} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \varepsilon \cos \theta) d\theta}{\{(\varepsilon - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta + 4 \left(\frac{z-c}{D} \right)^2\}^{\frac{3}{2}}} - \frac{\Gamma}{2\pi D} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \varepsilon \cos \theta) d\theta}{\{(\varepsilon - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta + 4 \left(\frac{z+c}{D} \right)^2\}^{\frac{3}{2}}} \quad (2)$$

(1)式の v_x は渦輪の軸を通る鉛直線上($\varepsilon=1.0$)で最大となる。この位置での z/D と v_x の鉛直分布の関係を図-2に示す。図-3は底面における渦輪中心軸上の速度である。 Γ が小さくなれば v_x は限りなく大きくなるが、実際には粘性の影響のためにこのようなことは起り得ず渦輪が底に近づく限りがある。まず限界高 z_0 をエネルギー式と流量の連続式より求め、渦輪が z_0 にある時の底面の流速を求める。

ピストンより押出された流体の運動エネルギーは 噴出口径を a ピストンの振中 A 、角周波数を ω とすると(3)式で表わされる。

$$E_0 = \frac{1}{2} \rho \frac{\pi a^2}{4} A \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \rho \pi a^2 A^3 \omega^2 \quad (3)$$

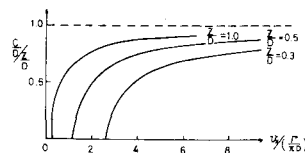


図-2 渦輪中心軸上の v_x の鉛直分布

一方 渦輪の運動エネルギー E は次の4つからなる。

$$\begin{aligned} E = & \text{渦輪の回転運動エネルギー} (E_1) \\ & + \text{渦輪の移動運動エネルギー} (E_2) \\ & + \text{渦輪外の回転運動エネルギー} (E_3) \\ & + \text{渦輪の運動により周囲の流体を排除} \\ & \text{するために使われるエネルギー} (E_4) \end{aligned} \quad (4)$$

渦輪の直径を d とすると 渦輪の移動速度は Lamb³⁾によつて

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi D} \left(\ln \frac{8D}{d} - \frac{1}{4} \right) \quad (5)$$

で与えられる。 ω' を渦輪の回転角速度とすると 運動エネルギーの各成分は

$$E_1 = \frac{1}{2} \rho \pi D \int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi r (r\omega')^2 dr = \pi \rho^2 D \omega'^2 \frac{d^4}{64} \quad (6)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \rho \pi D \frac{\pi d^2}{4} V^2 = \frac{1}{128} \rho \frac{D^2}{D} \Gamma^2 \left(\ln \frac{8D}{d} - \frac{1}{4} \right)^2 \quad (7)$$

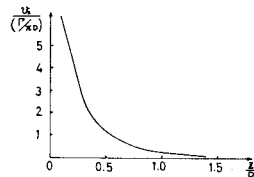


図-3 底面に近づく渦輪中心軸上速度

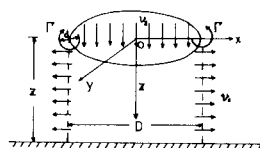


図-4

$$E_z = \frac{1}{2} \rho \pi D \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} 2\pi r (v_z^2 + v_r^2) dr \quad (8)$$

$$E_r = \frac{1}{2} \rho \pi D \frac{\pi}{4} d_0^2 v^2 = \frac{1}{128} \rho \frac{d_0^2}{D} v^2 \left(\ln \frac{8D}{d} - \frac{1}{4} \right)^2 \quad (9)$$

である。ここに、 d_0 は渦輪断面の回転部分の直径で円を仮定している。
循環の不変を仮定すると jet の出口で流体のもついた循環は渦輪でも保存されるので循環は近似的に (10) 式で表わされる。

$$\Gamma = \frac{\pi}{2} d^2 \omega' = \frac{2AA^2}{D} \omega \quad (10)$$

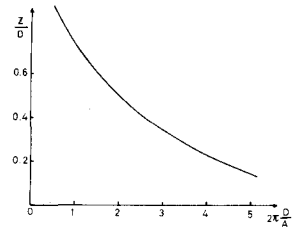


図-5 渦輪の高さに応じた流れの限界

次に回転運動する流体の流量の連続式を考える。図-4の Oxy 平面で渦核の中に軸内を通過する流体は速度成分として v_z のみを持ち点線で示した円筒の側面を通過する流体は v_r のみをもつ。渦核部分の流量は等しいのでこの部分の流量を除くと 2つの面を通過する流量はそれぞれ

$$Q_x = \pi D \int_0^{z-d/2} v_z dc \quad (11), \quad Q_z = \frac{\pi D^2}{2} \int_0^{1-d_0} v_r \varepsilon d\varepsilon \quad (12)$$

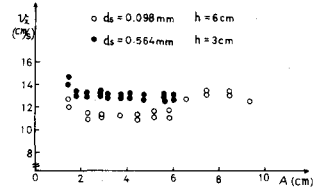


図-6 砂粒子浮遊限界流量

である。(1) 式で $c = \eta D/2$ の変数変換をし、 $\varepsilon = 1.0$, (2) 式で $c = z$ とおき、それぞれ (11), (12) 式に代入する。 $Q_x = Q_z$ より次式を得る。

$$\int_0^{z-d/2} \left[\left(\frac{2z}{D} - \eta \right) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\{(1-\cos \theta)^2 + \sin^2 \theta + (\frac{2z}{D} - \eta)^2\}^{\frac{3}{2}}} + \left(\frac{2z}{D} + \eta \right) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\{(1-\cos \theta)^2 + \sin^2 \theta + (\frac{2z}{D} + \eta)^2\}^{\frac{3}{2}}} \right] d\eta \\ = \int_0^{1-d_0} \left[\int_0^{2\pi} \frac{(1-\varepsilon \cos \theta) d\theta}{\{(\varepsilon - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta\}^{\frac{3}{2}}} - \int_0^{2\pi} \frac{(1-\varepsilon \cos \theta) d\theta}{\{(\varepsilon - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta + 16z^2/D^2\}^{\frac{3}{2}}} \right] \varepsilon d\varepsilon \quad (13)$$

渦輪が図-4の運動状態にある時 (8), (9) 式の $d_0/2$ と z とおきとすると (8) 式は v_z のみを考慮すればよいことになる。(8) 式に $\varepsilon = 1.0$, $\eta = \frac{D}{2}(z-c)$ の変数変換をし、(3), (6), (7), (8), (9), (10) 式を (4) 式に代入する。 $E_0 = E$ の条件から

$$2\pi \frac{D}{A} = 1 + \frac{1}{8} \left(\frac{d}{D} \right)^2 \left(\ln \frac{8D}{d} - \frac{1}{4} \right)^2 + \int_0^{z-d/2} \left[\eta \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\{(1-\cos \theta)^2 + \sin^2 \theta + \eta^2\}^{\frac{3}{2}}} + \left(\frac{4z}{D} - \eta \right) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\{(1-\cos \theta)^2 + \sin^2 \theta + (\frac{4z}{D} - \eta)^2\}^{\frac{3}{2}}} \right] \eta d\eta + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{D} \right)^2 \left(\ln \frac{8D}{d} - \frac{1}{4} \right)^2 \quad (14)$$

を得る。Sutherland の実験では底面の砂粒子が最初に動き始める位置は $z \approx 0.8a$ である。渦輪によって生じる速度は $z = D/2$ で最大であるので $D = 1.6a$ とし (13), (14) 式に代入すると両式は $z/D = d/D$ のみの関数となる。(13), (14) 式から求めた渦輪が底に近づく限界の高さを図-5に示す。図-6は砂粒子浮遊限界時の Sutherland の実験値 $2\pi D/A$ と図-3, 図-5 より求めた砂粒子浮遊限界の流速を示す。砂粒子特性が一定であれば浮遊限界の流速はほぼ一定と考えられる。又 $A < 6$ では解は v_z 一定の性質をよく表現しているといえる。しかし A が小さい場合と大きい場合では v_z がやや大になっている。これは A が小的时候に粒子移動が起るためには ω が大きくならねばならず、この時渦輪間相互の干渉が起る。

一方、 A が大の時にはピストンから押出された流体は噴流状となる。これらの場合には、渦輪の理論では現象を説明し得ない。Sutherland の砂粒子浮遊限界時の流速を hot wire を用いて測定した値は (流速測定 の位置は明確には示されていない) $d_s = 0.098 \text{ mm}$ の時、 $v_z = 9.4 \text{ cm/s}$, $d_s = 0.564 \text{ mm}$ の時、 $v_z = 17.6 \text{ cm/s}$ であった。

- 1) Willmarth, W. (1974), *Advances in Applied Mech.*, 2) Sutherland, A. J. (1966), Ph.D thesis, Calif. Inst. of Technology, 3) Lamb, H. (1963), *Hydrodynamics*.