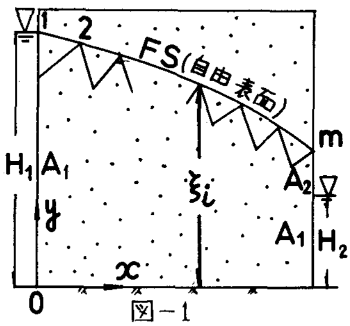
II-117 変分原理による浸透流の自由境界面の微分方程式について

九州大学 工学部 正員 上田 年比古
〃 神野 健二
○学生員 尾崎 哲二

序．従来より地下水流で自由境界面を定めるには準一様流の仮定に基づく水面形の非線型方程式，さらに線型近似した方程式を用いたり準一様流仮定をしない場合にはラプラスの式と自由境界面の形状とを反復修正し計算する方法がとられているが，後者の場合境界面の満足する方程式が明確にされていないようである。本報ではラプラスの式に対応する変分原理を通し境界面の満足する微分方程式を導きその特性について考察した。

1．基礎式と境界条件　図－1に示す流れの場を考える。基礎式はΦを速度ポテンシャル：$\Phi\equiv(p/\rho g)+y$ とすると $\partial^2\Phi/\partial x^2+\partial^2\Phi/\partial y^2=0$ ――(1)，境界条件は，$\Phi=H_1$，$\Phi=H_2$ on A_1 ――(2)，$\Phi=y$ on A_2 ――(3) $k\partial\Phi/\partial y=0$ on A_3 ――(4)，$\Phi=\xi(x,t)$ on FS ――(5) および $k\partial\Phi/\partial n=-\lambda\cos(n,y)\partial\xi/\partial t$ on FS ――(6) とする。k：透水係数，λ：空げき率，$\cos(n,y)$：法線ベクトルのy成分である。さて従来自由表面上での2つの条件を満足させるために(5),(6)式を交互に用いて計算する方法がとられているようであるが，ここでは境界面の微分方程式を定式化すること，および地下密度流のような二相流にも考え方が応用できるようにするため自由表面上では(6)式を用いて汎関数も考える。

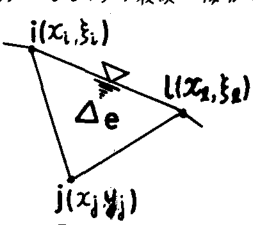


図－1

$$\chi(\Phi)=\iint(k/2)\{(\partial\Phi/\partial x)^2+(\partial\Phi/\partial y)^2\}dxdy-\sum_{i=1}^{2}\int_{A_1}k\partial\Phi/\partial n(\Phi-H_i)dS$$
$$-\int_{A_2}k\partial\Phi/\partial n(\Phi-y)dS+\int_{FS}\lambda\Phi\cos(n,y)\partial\xi/\partial t\,dS \quad ――(7)$$

2．境界面微分方程式の誘導　図－1に示すように便宜上自由表面上の節点に通し番号を付ける。(7)式を空間的に離散化し変分原理を適用すれば方程式がえられる。著者らは先に $\Phi=a_0+a_1x+a_2y+a_3xy+a_4x^2+a_5y^2$ とし(7)式に代入し $a_0\sim a_5$ を変分原理で求め境界面の方程式を構成し上の定式化の妥当性を検討した[1]。ここでは三角形分割の有限要素法を用いるとΦについての連立方程式をうる。すなわち K；係数行列，Φ；Φのベクトル，Q；定数項ベクトルとすると $K\Phi=Q$ ――(8)，いま分割 $\Phi=\begin{pmatrix}\Phi_{FS}\\ \Phi_D\end{pmatrix}$，$K^{-1}=\begin{pmatrix}G_1 & G_2\\ G_3 & G_4\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}C(t)+d_1\\ 0+d_2\end{pmatrix}$ ――(9) を行ない，(8)式より自由表面上のポテンシャルΦ_{FS}について $\Phi_{FS}=G_1(C(t)+d_1)+G_2d_2$ ――(10) をうる。ここに$C(t)$は(7)式の最後の積分に由来するものである。ところで(10)式のΦ_{FS}は(5)式により ξに等しい。$\boldsymbol{\xi}$をξのベクトルとすると $\Phi_{FS}=\boldsymbol{\xi}=G_1(C(t)+d_1)+G_2d_2$ ――(11)　つぎに$C(t)$について考える。(7)式最後の積分；

$\chi^e_{FS}\equiv\int_{FS}\lambda\Phi\cos(n,y)\partial\xi/\partial t\,dS$ （χ^e_{FS}はFS上の要素eについてのもの）を図－2に示す要素で実行し変分をとると $\partial\chi^e_{FS}/\partial\Phi_i=-(\lambda/2\Delta_e)\int_{x_\ell}^{x_i}\partial\xi/\partial t\cdot M_i\,dx$ $(i=1.2.3)$ ――(12)
ここに $M_i=a_i+b_ix+c_i\{-b_j(x-x_i)/c_j+\xi_i\}$，$a_i=x_j\xi_\ell-x_\ell y_j$，$b_i=y_j-\xi_\ell$，$c_i=x_\ell-x_j$，など
またΔ_eは三角形の面積である。さて$\partial\xi/\partial t$のとり扱いであるが後述するように$\partial\xi/\partial t$を節点間で一定とすると境界面微分方程式が不安定になる。そこで$\partial\xi/\partial t$を節点間で直線分布とし $\partial\xi/\partial t=(\partial\xi_\ell/\partial t-\partial\xi_i/\partial t)(x-x_i)/(x_\ell-x_i)+\partial\xi_i/\partial t$，$x_i\leq x\leq x_i$ ――(13)



図－2

(12)式に代入して $\partial\chi^e_{FS}/\partial\Phi_i=\lambda(x_\ell-x_i)(\partial\xi_\ell/\partial t/6+\partial\xi_i/\partial t/3)$，$\partial\chi^e_{FS}/\partial\Phi_j=0$，$\partial\chi^e_{FS}/\partial\Phi_\ell=\lambda(x_\ell-x_i)(\partial\xi_\ell/\partial t/3+\partial\xi_i/\partial t/6)$ ――(14)

したがって $C(t)=\Gamma\dot{\boldsymbol{\xi}}$（$\dot{\boldsymbol{\xi}}$は$\partial\xi/\partial t$のベクトル），$\Gamma$は右に示す行列である。また$\alpha_e\Delta x$は自由表面上の節点間の$x$座標の差，図－2の例では $\alpha_e\Delta x=x_\ell-x_i$ を表わす。Γは実対称の行列で $\Gamma<0$である。

$$\Gamma=-\frac{\lambda\Delta x}{6}\begin{bmatrix}2\alpha_1 & \alpha_1 & 0 & & & \\ \alpha_1 & 2(\alpha_1+\alpha_2) & \alpha_2 & 0 & & 0\\ 0 & \alpha_2 & 2(\alpha_2+\alpha_3) & \alpha_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \alpha_{m-2} & 2(\alpha_{m-2}+\alpha_{m-1}) & \alpha_{m-1}\\ & & & 0 & \alpha_{m-1} & 2\alpha_{m-1}\end{bmatrix}$$

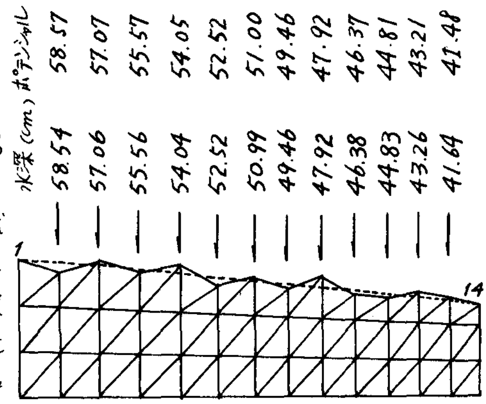
先に求めた(11)式と$C(t)$から $G_1\Gamma\dot{\xi}=\xi-G_1d_1-G_2d_2$ —(15)， 自由表面上の線積分で$\partial\xi/\partial t$ のとり扱いについて$\partial\xi/\partial t$ を節点間で一定値とするとその場合のΓは特異行列となってΓ^{-1}が存在しない。一方(13)式のようにおいて計算したΓは非特異でΓ^{-1}が存在する。またK^{-1}の小行列G_1は有限要素法によりポテンシャル分布が求められることを考えるとG_1^{-1}は存在すると言えよう。ゆえに(15)式をつぎのような標準的な形に書きなおす。

$$\boxed{\dot{\xi}=\Gamma^{-1}G_1^{-1}\xi-\Gamma^{-1}G_1^{-1}G_2d_2-\Gamma^{-1}d_1 \quad —(16)}$$

3. 微分方程式の性質について (16)式のG_1^{-1}やG_2, d_1, d_2の中には図-2に示すように表面上の節点のy座標ξが含まれており(16)式はξについての非線型連立方程式となっている。いまの場合有限要素法で定式化を行なうことを前提としていること，またξの変化が三角形要素の形状を著しく変えないとすると(16)式の行数行列$\Gamma^{-1}G_1^{-1}$をほぼ定数行列とみなせる場合があると考えられる。このときには(16)式の安定性は$\Gamma^{-1}G_1^{-1}$の固有値が負の実数部を持てば保証される[2]。具体的に図-3に示す例で定常流近傍の安定性を考えた。この場合左端の点1と右端の点14は既知として(16)式から除くので(16)式は12元の連立方程式となる。最初水面形を任意に仮定し(16)式を下に示す差分式で計算し図-3中破線で示す最終値まで計算した。差分式はνを時間ステップ数とすると

$$\xi^{(\nu+1)}=[I-\Delta t(\Gamma^{-1}G_1^{-1})^{(\nu)}]^{-1}\xi^{(\nu)}-\Delta t[I-\Delta t(\Gamma^{-1}G_1^{-1})^{(\nu)}]^{-1}(\Gamma^{-1}d_1+\Gamma^{-1}G_1^{-1}G_2d_2)^{(\nu)} \quad —(17)$$

ここにIは単位行列である。表-1には$\Gamma^{-1}G_1^{-1}$の実数部を示す。水面形の変化に伴う固有値の変化はほとんどなく一定であった。また(17)式の行列$[I-\Delta t(\Gamma^{-1}G_1^{-1})^{(\nu)}]^{-1}$の固有値は$\Delta t$を2.0sec～50.0secで変えて計算したが1以下であった。$t\to\infty$となって収束した水面形がその点のϕ_sに一致しないのは空間的な離散化誤差によるものと考える。



（左水深=60.0cm，右水深=40.0cm）

図-3

1	−0.395	7	−0.110
2	−0.346	8	−0.081
3	−0.296	9	−0.057
4	−0.242	10	−0.038
5	−0.191	11	−0.022
6	−0.146	12	−0.007

表-1 (16)式の固有値

つぎに左端の水深$H_0=40.0cm$，振幅$h_0=5.0cm$，周期$T=200sec$で変動させた。この場合，$\partial\xi/\partial t=(kH_0/\lambda)\partial^2\xi/\partial x^2$，$x=0$で$\xi=H_0+h_0\sin(2\pi t/T)$，$x\to\infty$で$\xi=H_0$のときの解，

$\xi=H_0+h_0e^{-m_1x}\sin(2\pi t/T-m_1x)$，$m_1=(\pi\lambda/kH_0T)^{1/2}$ —(18) のm_1と(17)式によるm_1とを比較した。$k=0.25cm/sec$，$\lambda=40\%$に対し (18)式の$m_1=0.0234$で表-2のm_1が10%前後大きい。(17)式と(18)式とは境界条件が異なるので直接比較はできないが強制的な水面変動を与えても(16)式で表わされる微分方程式系はほぼ追随性があるといえる。

(17)式によるm_1の値	
x (cm)	m_1 (cm^{-1})
18.0	0.0248
35.0	0.0262
52.5	0.0257
69.5	0.0264

表-2

4. 結び 本報では境界面の満足すべき微分方程式を有限要素法により定式化し(16)式の行列$\Gamma^{-1}G_1^{-1}$がほぼ一定，すなわち一定の固有値を持つ場合の安定性を計算例で示した。有限要素法により定式化したので急激な水面変動に対してはその都度要素で分割をやり直し安定性についても非線型の影響を考慮せねばならないが定常流近傍の漸近的挙動については$\Gamma^{-1}G_1^{-1}$の性質を調べればよいと思われる。今後は浸潤面のある場合や水面変動が大きい場合，および地下密度流での二相流境界面形状のみたすべき微分方程式についての定式化など検討したいと思う。

参考文献

1) 神野・尾崎・上田：“変分原理による浸透流の自由境界面の微分方程式について”，九州大学工学集報 vol.49，NO.4，8月 昭51年

2) J.ラサール，S.レフシェッツ著，山本稔訳 “リャプノフの方法による安定性理論”，産業図書 p.41