II-87　水文流出の振動系としての特性について

山梨大学工学部　正員　荻原能男

水文現象が時間的に確率法則にしたがって発生しているという見地から確率過程水文学（Stochastic Hydrology）が日野[1)]によって提唱された。この手法による研究は，菅原[2)]，高棹[3)]，Eagleson[4)] などによってでも行われた。水文量の発生を確率統計的に整理しようとする確率統計水文学と並んで，この確率過程水文学は水文現象の不規則性の中から確率法則を発見し，その時間的変化も考慮して入出力の関係を明確にしようとするものである。

1）Wiener－Hopf の方程式と応答関数

1967年に日野[1)]によってWienerの情報理論（1949）が流出予測にはじめて適用された。単位流出関数 $h(t)$ と降雨 $x(t)$ のたたみこみ（Convolution）で流出 $y(t)$ は

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot x(t-\tau)d\tau \quad \cdots\cdots (1)$$

と表現される。x，y を観測資料として最適な応答関数 $h(\tau)$ を求めることは

$$\varepsilon(t)^2=\left[\,y(t)-\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot x(t-\tau)d\tau\,\right]^2$$

で与えられる $\varepsilon(t)^2$ の時間平均 $\overline{\varepsilon(t)^2}$ を最小にする問題に帰着する。

すなわち　$[R_{xy}]=[R_{xx}][h]$ ……… (2)　となる。ここに，$[R_{xx}]$ は $x(t)$ の自己相関関数マトリックス，$[R_{xy}]$ は $x(t)$ と $y(t)$ の相互相関関数マトリックスである。最適応答関数 $[h]$ は

$$[h]=\left\{[R_{xx}]^T[R_{xx}]\right\}^{-1}[R_{xx}]^T[R_{xy}] \quad \cdots\cdots (3)$$

として計算される。日野は神流川の資料を用いて $[h]$ の計算を行い，今日の確率過程水文学の基礎を築いた。

2）スペクトルと周波数応答関数

10年ほど前より，水文量の不規則性・偶然性の中より周期性・線形性などの法則を抽出しようとしてスペクトル解析が適用され，システム工学を用いることが有益であることが少数の研究者によって提案された。今日，それが認められ水理講演会の重要課題とされるまでに至った。いわゆる確率過程水文学の誕生である。ここで，水文量のスペクトルおよび周波数応答関数（システム関数）について記述する。水文量 $z(t)$ を Fourier 級数展開すると

$$z(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{a_n\cos n\pi t+b_n\sin n\pi t\right\} \qquad a_n=\int_0^2 z(t)\cos n\pi t\,dt \qquad b_n=\int_0^2 z(t)\sin n\pi t\,dt \quad \cdots\cdots (4)$$

となり，周期 $T=2/n$ すなわち周波数 $f=n/2$ の振巾スペクトルが $|F(n)|=\sqrt{(a_n^2+b_n^2)/2}$ で定義され，パワースペクトルが　$|F(n)|^2=(a_n^2+b_n^2)/2$　で与えられる。すなわち，水文量 $z(t)$ に含まれる周期 $T=2/n$ の周期成分の強度がパワースペクトルとして選択抽出されることになる。また，$n=2f$，$S_{zz}(f)=|F(n)|^2$ とおくと，$z(t)$ の自己相関関数 $R_{zz}(\tau)$ とパワースペクトル $S_{zz}(f)$ の間には Wiener－Khinchine の関係

$$S_{zz}(f)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{zz}(\tau)e^{-i2\pi f\tau}d\tau\,, \qquad R_{zz}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} S_{zz}(f)e^{i2\pi f\tau}df \quad \cdots\cdots (5)$$

が成立する。先に述べた降雨 $x(t)$ と流出 $y(t)$ の線形沪波　式（1）を用いて $R_{yy}(\tau)$，$R_{xy}(\tau)$，$R_{xx}(\tau)$ を計算し，Wiener－Khinchine の関係よりスペクトルを求めると，単位インパルス応答関数 $h(\tau)$ のフーリエ変換である周波数応答関数（システム関数）$H(f)$ が次の関係より計算できる。

$$S_{yy}(f)=|H(f)|^2 S_{xx}(f) \quad \cdots\cdots (6) \qquad S_{xy}(f)=H(f)\cdot S_{xx}(f) \quad \cdots\cdots (7)$$

降雨 $x(t)$ の $f=f$ 周期成分 $x(t)=X\sin 2\pi ft$ が流出の同周期成分 $y(t)=Y\sin(2\pi ft+\varphi)$ にどのように応答するかを示すのが周波数応答関数である。すなわち　$Y/X=H(f)$ ……… (8)　なる関係が

成立し，XとYは線形であるがY/Xの値は周波数fによって変化する。φは位相差であって，これもfによって定まる。このことは降雨流出現象の特性を明確にする上で重要なことである。このように制御系の未知の特性を適当な入力データと出力データにもとずいて推定することをシステム同定という。

さて，降雨流出をこのように周期現象として取扱うことに疑問を持つ研究者も多いものと推定される。そこで以下に降雨流出の周期性について説明を加えよう。

3）水文量の振動特性

降雨流出系の代表的なシステムモデルとして貯留関数法を例にとって説明する。Fig. 1 に示すようにIを降雨，Sを貯留量，Qを流出とすれば連続の条件より

$$dS/dt = I - Q \quad \cdots\cdots (9)$$

なる関係が存在する。また，流出Qの支配関数は一般にT_1，T_2を遅れ時間として

$$Q = f\{S(t-T_1), I(t-T_2)\} \quad \cdots\cdots (10)$$

で表現される。その代表的なものとして

木村[5]によって示された　$dS = \varphi(Q)dQ$ ……(11)

日野[6]によって示された　$S = K_1(Q-Q_1)^m$ ……(12)

Prasad[7]によって示された　$S = K_1Q^m + K_2 dQ/dt$ ……(13)

などがあげられる。式(9)と式(13)を組合せると振動方程式になることは明白である。式(11)～(13)をまとめて単純に

$$Q(t) = F\{S(t-T)\}, \quad dF/dS > 0 \quad \cdots\cdots (14)$$

と仮定すれば Fig. 2 のような関係が類推される。すなわち，Sが増加する場合には Fig. 2 のB点のQを定めるのにT時間前のA点のSの値により，Sが減少する場合にはD点のQがC点のSによって定まる。このため，図のようなループが生ずる。

さらに式(9)を考慮するとFig. 3のようになる。すなわち降雨IによりdS/dtの値がD点よりA点に移動し，一般に$dS/dt>0$となるためSは増加する。降雨がやみ$I=0$となればB点よりC点にdS/dtの値が変化し，$dS/dt<0$となりSは減少するがQは式(14)によりT時間前のSの値により定まるため，しばらくの間増加する。

Fig. 3 は振動系で良く用いられる位相平面であって，振動特性を調べるのにしばしば用いられている。

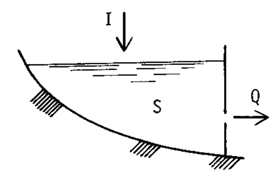

Fig. 1

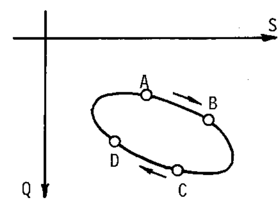

Fig. 2

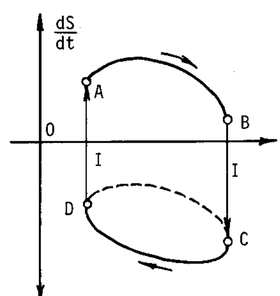

Fig. 3

引用文献

1) 日野幹雄；情報理論的水文学への序説Ｉ（流出予測性の向上）　東工大 土木工学科研究報告 No.4，1968

2) 菅原正己；水資源の変動様相に関する調査，第6報（水文諸量のスペクトル解析）　科学技術庁資源局　1965

3) 石原藤次郎，高棹琢馬，池淵周一；長期間流出解析法に関する2,3の考察，土木学会論文報告集　1971

4) Eagleson, P. S. etc; Computation of optimum realizable unit hydrographs. Water Resources Res. Vol. 2, No. 2, pp. 755～764, 1966

5) 木村俊晃；貯留関数法，土木技術資料 Vol. 4，No. 1　1962

6) 日野幹雄；非線形流出解析および適応流出予測，1975年度土木学会水工学夏期研修会講義集 A－8　1975

7) Prasad, R.; A nonlinear hydrologic system response model, Proc. ASCE. Vol. 93, No. HY4,　1967