

I. はじめに

流出現象の非線形性の解明は、流出解析の1つの主要なテーマであるが、有力な解析的手段が存在しないという難問が横たわっている。この種の問題に対して従来用いられてきた手法としては、摂動法などの線形近似によるのが一般的であったが、しかし、その場合の有効性というものは非常に強い制限の下にしか存在しない。つまり、非線形の場合には、その局所的な性質を押さえることが出来たとしても、それから直ちに全体的な性質を云々出来ないという難点がある。

本論文は、従来のような取り扱いによってではなく、Wienerの直交汎関数展開法を用い、系の物理的基礎方程式に内包される非線形性を非線形核というexplicitな形に表わすことによって、現象の理解を深めようとしたものである。ただし、ここでの非線形核の導出のプロセスとしては、あくまで、系の基礎方程式との関連から理論的に求めることを主眼としている。というのも、従来のような、black boxの思考に基づいて核を求める方法によっては、系の物理性との関連が明らかでない以上、現象の本質のメカニズムを解明するという立場からは有効ではなく、また、データに依存したものであるから一般性に欠けるという面もあるからである。

II. 流域モデル及び基礎方程式

ここでは、Fig-1のような理想化された一定勾配の流域に、空間的に一様な降雨がある場合を考える。基礎方程式としては、式(1)、(2)に示すような、連続式と一般的な型の抵抗則ともを用いる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r(t) \quad (1) \quad q = ah + bh^2 + ch^3 + \dots \quad (2)$$

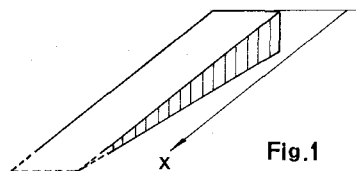
q; 単位幅当りの流量
h; 水深
r; 降雨強度

いま、式(2)の右辺の3次以上の項を省略し、式(1)に代入すれば式(3)を得る。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \left\{ a + 2b \cdot h \right\} \frac{\partial h}{\partial x} = r(t) \quad (3)$$

ここで、 $r(t)$ は定常確率過程であり、かつ、次の性質があるものとする。

$$E[r(t)] = \bar{r}, \quad E\{[r(t_1) - \bar{r}][r(t_2) - \bar{r}]\} = k\delta(t_1 - t_2)$$



III. 核関数に関する関係式の理論的導出

水深 $h(x, t)$ を直交汎関数展開表示すると、

$$h(x, t) = K_0(x) + \int_{-\infty}^t K_1(x; t-\sigma) R_1(\sigma) d\sigma + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t K_2(x; t-\sigma_1, t-\sigma_2) R_2(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 + \dots \quad (4)$$

ここに、 $K_0, K_1, K_2, \dots$ は、応答核関数。また、 $R_1, R_2, \dots$ は、式(5)で定義されるような、確率変数 $R(\sigma) = r(t) - \bar{r}$ の Hermite 多項式表示であり、式(6)で示すような直交性が備わっている。

$$\left. \begin{aligned} R_1(\sigma) &= R(\sigma), & R_2(\sigma_1, \sigma_2) &= R(\sigma_1)R(\sigma_2) - k\delta(\sigma_1 - \sigma_2) \\ R_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= R_1(\sigma_1)R_2(\sigma_2)R_1(\sigma_3) - kR_2(\sigma_1)\delta(\sigma_2 - \sigma_3) - kR_2(\sigma_2)\delta(\sigma_1 - \sigma_3) - kR_2(\sigma_3)\delta(\sigma_1 - \sigma_2) \\ R_4(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) &= R_1(\sigma_1)R_2(\sigma_2)R_2(\sigma_3)R_1(\sigma_4) - k\sum R_3(\sigma_i)R_1(\sigma_j)\delta(\sigma_k - \sigma_l) + k^2\sum\sum\delta(\sigma_i - \sigma_j)\delta(\sigma_k - \sigma_l) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$E[R_m \cdot R_n] = 0, \quad m \neq n; \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{ただし, } R_0 \text{ は定数を意味する。}) \quad (6)$$

次に、式(4)の右辺を3項まで打ち切って式(3)に代入し、式(6)の関係をを用いて整理すると式(7)を得る。

$$\left\{ a + 2bK_0(x) \right\} \frac{dK_0(x)}{dx} + bK_1(x) \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^t K_1(x; t-\tau) d\tau + 2bk^2 \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial x} \left\{ K_2(x; t-\tau_1, t-\tau_2) \right\} d\tau_1 d\tau_2 = \bar{r}$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial K_1(x; t-\tau)}{\partial t} + a \frac{\partial K_1(x; t-\tau)}{\partial x} + 2b \frac{\partial}{\partial x} \left\{ K_0(x) K_1(x; t-\tau) \right\} + 4bk \int_0^{t-\tau} \left\{ K_1(x; t-\sigma) K_2(x; t-\tau, t-\sigma) \right\} d\sigma = \{1 - K_1(x; 0)\} \delta(t-\tau) \\ & \frac{\partial K_2(x; t-\tau, t-\tau_2)}{\partial t} + a \frac{\partial K_2(x; t-\tau, t-\tau_2)}{\partial x} + 2b \frac{\partial}{\partial x} \left\{ K_0(x) K_2(x; t-\tau, t-\tau_2) \right\} + b \frac{\partial}{\partial x} \left\{ K_1(x; t-\tau) K_1(x; t-\tau_2) \right\} \\ & + 4bk \int_0^{t-\tau} \left\{ K_2(x; t-\sigma, t-\tau_2) K_2(x; t-\sigma, t-\tau_2) \right\} d\sigma + K_2(x; 0, t-\tau_2) \delta(t-\tau) + K_2(x; t-\tau, 0) \delta(t-\tau_2) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

上式より、核を決定するパラメーターは、 $a, b, \bar{r}, k$ であることが分かる。ここで、 k が非線形の場合 ($b \neq 0$) にも影響するパラメーターとなっているのは、ある時点での 1 滴降雨による影響の仕方が、非線形となると、最早独立ではなくなるからである。また、非線形性を有する系では、各次の応答核は独立に決定されず、それぞれの核の間に interaction が存在することが分かる。

IV. Galerkin法による解

式(7)の解を Galerkin 法によって求める。ここでは、直交関数系として Laguerre 多項式を採用するものとし、流出核を式(8)のように表示する。

$$\left. \begin{aligned} K_1(x; t-\tau) &= \sum_n w_n(x) \psi_n(t-\tau) \\ K_2(x; t-\tau, t-\tau_2) &= \sum_{n_1} \sum_{n_2} z_{n_1, n_2}(x) \psi_{n_1}(t-\tau) \psi_{n_2}(t-\tau_2) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここに、 $\psi_n(t-\tau) = e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)} L_n(t-\tau)$ L_n : Laguerre 多項式

式(8)を式(7)に代入し、 ψ_n の直交性を利用して整理すれば、次式のような、連立常微分方程式に帰着できる。

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ a + 2b K_0(x) \right\} \frac{d}{dx} w_n(x) + 2bk \sum_{i=1}^{\infty} w_i(x) \frac{d}{dx} w_i(x) \\ & + 4bk \sum_{i_1, i_2} z_{i_1, i_2}(x) \frac{d}{dx} z_{i_1, i_2}(x) = \bar{r} \\ & \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} w_i(x) - \sum_{i=n+1}^{\infty} w_i(x) \right\} + \left\{ a + 2b K_0(x) \right\} \frac{d}{dx} w_n(x) \\ & + 2b w_n(x) \frac{d}{dx} K_0(x) + 4bk \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ w_i(x) z_{n, i}(x) \right\} = \frac{1}{2} \\ & \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ & \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=0}^{n_1-1} z_{i, n_2}(x) - \sum_{i=n_1+1}^{\infty} z_{i, n_2}(x) + \sum_{i=0}^{n_2-1} z_{i, n_1}(x) - \sum_{i=n_2+1}^{\infty} z_{i, n_1}(x) \right\} + 2b z_{n_1, n_2}(x) \frac{d}{dx} K_0(x) \\ & + \left\{ a + 2b K_0(x) \right\} \frac{d}{dx} z_{n_1, n_2}(x) + b \frac{d}{dx} \left\{ w_{n_1}(x) w_{n_2}(x) \right\} + 4bk \sum_{i_1, i_2} \left\{ z_{i_1, i_2}(x) z_{n_1, n_2}(x) \right\} \\ & = 0 \\ & \quad (n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Fig-2, 3 は、上式を Runge-Kutta-Gill 法によって積分した計算結果の 1 例であって、それぞれ、線形核、2 次の非線形核を示している。

V. 結 語

本論文で示した方法によって、系の基礎方程式から Wiener 理論を用いて、理論的に核関数を導出できることが分かった。乱流では、エネルギー・カスケードをまわすために非線形項を多くとらなければならぬので、Wiener 展開はそれほど有力な方法ではないのに比べ、流出の問題では、二次の非線形項までで充分であり、良い結果が得られる。また、式(7)を Galerkin 法によって解くやり方は、計算速度、解の収束性などの点で、前に報告した、直接数値的に解く方法より有利であると思われる。

— 参考文献 —

- Hino, M: Stochastic Approach to Linear and Nonlinear Runoff Analysis, 東京工業大学 土木工学科 研究報告 No.12 (1972)
Wiener, N: Nonlinear Problems in Random Theory, MIT Press (1958)

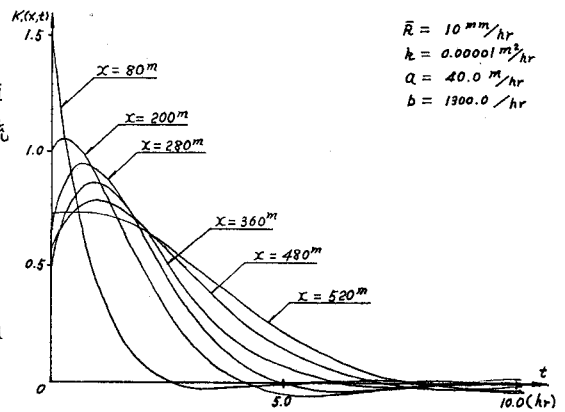


Fig. 2

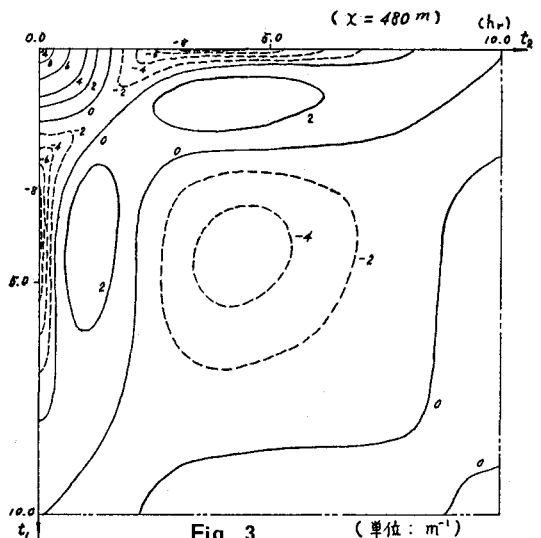


Fig. 3

(単位: m³)