

徳島大学工学部 正員 ○端野 道夫
同 上 正員 田 中 孝 夫

1. ま え が き 水文量の信頼限界に関する従来の基本的考え方は順序統計学に基づくものがほとんどである。⁽²⁾⁽³⁾ この方法では、 N_2 の水文資料より、 $T > N$ なるリターンペリオド T に対する水文量の信頼限界について解を与えることができず、何んらかの仮定を設けて簡便的に外挿せざるを得ない。したがって、少数の標本数 N よりも大なるリターンペリオド T に対する水文量を計画量とすることが多い現実を見る時、より合理的な信頼限界理論の開発が切望される。本研究では、最尤法(Maximum Likelihood Method) より得られるパラメータ推定誤差の分散共分散行列を用い、上述の問題点が解消されうると考え、対数極値分布 A 型に対するリターンペリオドの標準誤差を評価する式を誘導し、理論の妥当性をシミュレーションによって検討する。

2. 対数極値分布 A 型の最尤方程式と解法 対数極値分布 A 型の非超過確率分布 $F(x)$ 、確率密度関数 $f(x)$ は次式で表わされる。

$$F(x) = \exp(-e^y), \quad f(x) = \frac{R}{C} e^{-y(1+\frac{1}{R})} \cdot F(x) \quad (1), \quad y = R \ln\left(\frac{x+b}{C}\right) \quad (2)$$

ここに、 R, b, C はパラメータ。尤度関数の自然対数を L とすれば、

$$L = \ln \prod_{i=1}^N f(x_i) = N \ln \frac{R}{C} - \sum_{i=1}^N e^{-y_i} - (1 + \frac{1}{R}) \sum_{i=1}^N y_i \quad (3)$$

ここに、 $x_i (i=1, 2, \dots, N)$ は極値水文資料、 $y_i = R \ln[(x_i + b)/C]$ 、 $(i=1, 2, \dots, N)$ である。

最尤法の定義より、(3)式の L を最大にするパラメータ R, b, C の値が最尤解を与えることから、次式のような非線形連立方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial R} &= \frac{1}{R} \{ N + \sum y_i e^{-y_i} - \sum y_i \} = 0, & \frac{\partial L}{\partial b} &= \frac{1}{C} \{ R \sum e^{-y_i(1+\frac{1}{R})} - (R+1) \sum e^{-y_i/R} \} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial C} &= \frac{R}{C} \{ N - \sum e^{-y_i} \} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

($\sum$ 内の y の添字 i を以下省略)

この非線形連立方程式は、Newton-Raphson 法による繰返し計算によって解くことができる。

いま、最尤解を $\hat{R}, \hat{b}, \hat{C}$ 、第 j 次近似値を R_j, b_j, C_j 、その差を $\Delta R_j, \Delta b_j, \Delta C_j$ とすれば、 $L(R_j, b_j, C_j) = L(\hat{R} - \Delta R_j, \hat{b} - \Delta b_j, \hat{C} - \Delta C_j)$ ゆえ、尤度 $L(R_j, b_j, C_j)$ の R, b, C に関する偏微分(4)式最左辺)をそれぞれ $R = \hat{R}, b = \hat{b}, C = \hat{C}$ まわりに Taylor 展開し、二階の偏微分項までをとり、若干の変形後、次式が得られる。

$$(\Delta R_j, \frac{\Delta b_j}{C_j}, \frac{\Delta C_j}{C_j}) = \left(\frac{\partial L(R_j, b_j, C_j)}{\partial R}, C_j \cdot \frac{\partial L(R_j, b_j, C_j)}{\partial b}, C_j \cdot \frac{\partial L(R_j, b_j, C_j)}{\partial C} \right) \times A^{-1} \quad (5)$$

ここに、行列 A は対称行列で、その要素 a_{mn} は次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= R^2 \cdot \{ N + \sum y_i^2 e^{-y_i} \}, & a_{22} &= (R+1) \{ R \sum e^{-y_i(1+\frac{1}{R})} - \sum e^{-2y_i/R} \}, & a_{33} &= R \{ N + (R-1) \cdot \sum e^{-y_i} \} \\ a_{12} &= a_{21} = \sum y_i e^{-y_i(1+\frac{1}{R})} - \sum e^{-y_i(1+\frac{1}{R})} + \sum e^{-y_i/R}, & a_{23} &= a_{32} = -R^2 \sum e^{-y_i(1+\frac{1}{R})}, & a_{13} &= a_{31} = -N - \sum y_i e^{-y_i} + \sum e^{-y_i} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(6)式の行列要素は、大標本論的には、それらの期待値で置換えができ、 $V = E[A^{-1}]$ は最尤推定値の分散共分散行列を表わし、かつ最尤推定値は正規分布をすることが証明されている⁽⁴⁾。結局、(5)式が繰返し計算の基本式である。初期値の与え方については文献 5), 6) を参照して頂きたい。

3. リターンペリオドの標準誤差 水文量の特定値 x に対するリターンペリオド T 、すなわち、

$$T = 1 / \{ 1 - F(x) \} = 1 / \{ 1 - \exp(-e^y) \} \quad (7)$$

の誤差分散 S_T^2 は (2), (7) 式の微小変動量を考え, それらの 2 乗の期待値をとることにより, 次のような関係式で与えられる。

$$\left[\frac{S_T}{T^2 \exp(-y - e^{-y})} \right]^2 = S_y^2 = \frac{y^2}{R^2} \cdot S_R^2 + R^2 \cdot e^{-2y/R} \left\{ \frac{S_b^2}{C^2} \right\} + R^2 \cdot \left\{ \frac{S_c^2}{C^2} \right\} + 2y \cdot e^{-y/R} \left\{ \frac{\text{Cov}(R, b)}{C} \right\} - 2R^2 \cdot e^{-y/R} \left\{ \frac{\text{Cov}(b, C)}{C^2} \right\} - 2y \cdot \left\{ \frac{\text{Cov}(R, C)}{C} \right\} \quad (8)$$

ここに, y は (4) 式より T の関数であり, S_R^2, S_b^2, S_c^2 は添字 R, b, C の誤差分散, $\text{Cov}(R, b), \text{Cov}(b, C), \dots$ は共分散である。ところで, 前述のように, これらの分散共分散(厳密には (8) 式右辺の $\{ \}$ 内の諸量)は, 大標本論的に, (5), (6) 式で与えられる行列 A の期待値の逆行列 $V = E[A^{-1}]$ で与えられるが, この V をそのまま (8) 式右辺の $\{ \}$ 内の値として用いるには疑問がある。そこで, ここでは, (6) 式中の y_i 値として, 角屋が提案した plotting value²⁾ (y_N, y_i は厳密解, 中間値は線形補間) の考え方を準用し (6) 式の各要素を計算し, その逆行列を (8) 式右辺の $\{ \}$ 内の値とすればよいだろう。

4. S_T/T と N, T, C_s との関係図 上述の方法により, (6), (8) 式を用いて, リターンペリオドの相対誤差 S_T/T と標本数 N , リターンペリオド T , および λ の母ひずみ係数 C_s (食みの関数) との関係を図示すれば, 図-1 のようになる。この図によれば, たとえば, $N=60$ の極値資料より $T=200$ 年に対する氷文量を計画値とした場合, T の相対誤差 S_T/T は 0.55~0.56 で C_s 値の影響をほとんど考慮しなくてもよいことが判る。図-2 は従来の方法(角屋)による変動域(標準誤差の領域)と本方法と比較を示したものであり, $F(x) \geq 0.99$ 以上になると予想通り本方法との間に大きな違いが現れてくる。

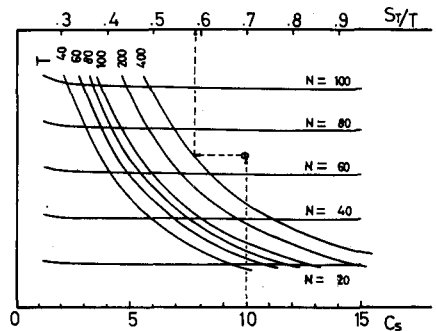


図-1 S_T/T と N, T, C_s の関係図

本方法の妥当性は N がどの程度以上になるとプラメータ R, b, C , とくに R の最大推定値分布を正規分布と見なしうるかにかかっている。最大法を用いた若干のシミュレーションによれば, $N=40$ でも R の最大推定値は正規分布と見なしうるようである。(6) 式中の y_i 値として y_N, y_i 以外の中間値を線形補間したことに検討の余地が残されている。

信頼限界理論への最大法の利用を試み, 有力な手法であることが明らかとなった。他の分布についても同様な手法が適用できるため, 今後の発展が期待される。

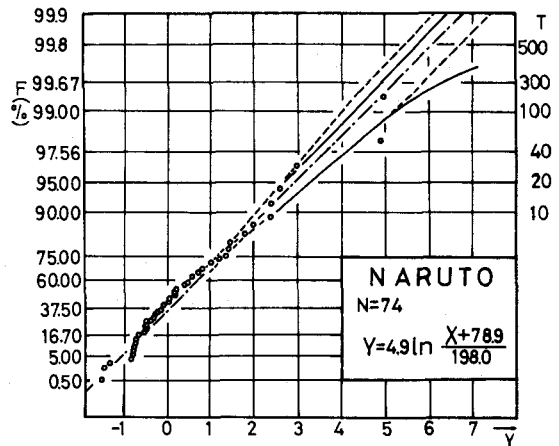


図-2 年最大日雨量分布の変動域 (実線: 本方法, 破線: 角屋法)

参考文献

- 1) 角屋 睦: 計画洪水量に関する順序統計学的考察, 農業土木研究, 第21巻, 第3号, 昭. 28. 9
- 2) 角屋 睦: 計画降雨量に関する順序統計学的考察, 農業土木研究, 第22巻, 第6号, 昭. 30. 3
- 3) Bobee, B. and Morin, G.: Determination des Intervalles de Confiance de la Loi Pearson III par les Statistiques d'Ordre, Journal of Hydrology, Vol. 20, No. 2, 1973
- 4) Cramér, H.: Mathematical Methods of Statistics, Princeton University Press, 1971, p. 500
- 5) Jenkinson, A.F.: Statistics of Extremes, World Meteorol. Organ., Report 98, Chapter 5, Geneva, 1969
- 6) 端野 進夫: 最大法による打数正規分布の実用的定数推定法とその応用例, 第20回水理講演会論文集, 1976
- 7) 角屋 睦: 氷文量の PLOTTING POSITION について, 京大防災研年報, 第3号, 昭. 34