II-77　時系列における定常性と非定常性について

北海道大学工学部　正員　没中建一郎

1、まえがき

水文学を含め、現在多くの工学的分野に於て、対象とする現象の時系列的取り扱いがなされている。しかしここで、時系列という言葉そのものに対する定義は必ずしも明確ではない。一方では単に、確率変数 $X_t(\omega)$ のパラメータ t が時間を表わす時のことを言い、他方、観測された観測値そのものの時間的並びをさすこともある。これはいずれも実際に扱うのは確率過程の見本関数だという意味で同じだと言えるが、多くの時系列的取り扱いの実例を見ると、むしろ、仮定すべき確率構造に対する情報が皆無かあるいわ非常に少ない場合に多く時系列と呼ばれているように思われる。しかしこの場合、確率過程に対する諸々の性質や定義を直接用いることは出来ない。ここでは、その様な違いを明確にするため、特に定常性と非定常性をとり上げて調べてみる。

2、自己回帰過程における定常性、非定常性

時系列解析において自己回帰過程は多く用いられる。さらに Box & Jenkins はそれを一般化したARIMA過程により、非定常過程をも取り扱っている。そこで、このARIMA過程を例にとり定常性、非定常性を調べてみる。その一般式は

$$\pi(B)\nabla^d z_t = \psi(B)\eta_t \quad ; \eta_t \text{ は white noise} \qquad \text{---- (1)}$$

ここで $\pi(B)$ は自己回帰演算子、$\psi(B)$ は移動平均演算子で共に転換性を持つ。∇^d は d 回の差分演算子である。$\pi(B)$, $\psi(B)$ は転換性を持つから $\nabla^d z_t$ は結局次の様に表わされる。

$$\nabla^d z_t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \eta_{t-i} \quad \text{ただし} \quad a_i<\infty, \ n\to\infty \text{ のとき } a_n\to 0 \qquad \text{---- (2)}$$

さらに、z_t の性質を調べるため、$d=1$ として、η_t を順次発生させ、z_t の構成的存在を計算すると、η_t の直交性から

$$z_t = \sum_{s=0}^{t}\sum_{i=0}^{\infty} a_i \eta_{s-i} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \sum_{s=0}^{t}\eta_{s-i} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i W_{t-i} \quad \text{ただし} \quad W_t=0,\ t<0 \qquad \text{---- (3)}$$

W_t は white noise の積分したものであり、Wiener 過程となり、結局 z_t は Wiener 過程の移動平均過程という特殊なものを表わすことになる。（すなわち、平均値＝0，分散は時間と共に増加する。）

確かに (3) 式は非定常な過程であるが一般的ではない。しかも Box & Jenkins によれば、(1) 式で扱おうとする非定常性は (3) 式の様なものではなく、彼らの言葉を使えば level の変化や slope の変化ということである。その考えを示したのが図-1である。その level の変化や slope の変化を除くため差分を取るというのが考え方の基本になっている。しかしその場合でも (1) 式では表わすことは出来ない。たとへば、z_t を次の様に置くと

$$z_t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \eta_{t-i} + C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots\cdots \qquad \text{---- (4)}$$

$$\nabla z_t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(\eta_{t-i} - \eta_{t-i-1}) + C_1 + C_2 t + \cdots$$

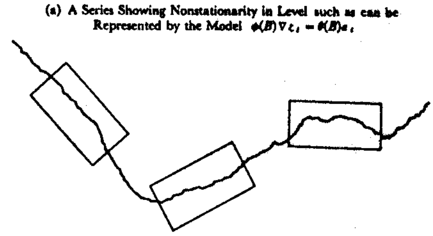
一般的には

$$\pi(B)\nabla^d z_t = \psi(B)\nabla^d \eta_t \qquad \text{---- (5)}$$

で表わさなければならない。

確かに (5) 式では $C_0, C_1, \cdots$ 等は消去されて、一般的な定常過程の取扱いが可能となっている。しかし、図-1で示されている level や slope は時間的に変化している。（実は時間的に変化

(a) A Series Showing Nonstationarity in Level such as can be Represented by the Model $\phi(B)\nabla z_t = \theta(B)a_t$



(b) A Series Showing Nonstationarity in Level and in Slope such as can be Represented by the Model $\phi(B)\nabla^2 z_t = \theta(B)a_t$

FIG 1　(Box & Jenkins)

するというのは奇妙であって、もしそうであるならそれは変動そのものであるから、部分的に一定値をとり、step 関数状に変化すると理解する） したがって、過程が部分的に (4) 式で表わされたとしても、差分系列の中に、Constant 量の変化する時点でその変化量が表われるはずで、その取り扱いは不明確である。さらに重要なことは、図-1で示された系列が非定常であるという根拠は実は全くないのであって、これが定常確率過程の一見本関数であることは十分起り得ることである。

確率過程の定常性（のちの議論のため弱定常だけを考える）は、平均値と自己共分散が

$$m_t \equiv E(X_t) = m \ (const.) \qquad \gamma(t,\tau) \equiv E(X_t X_{t-\tau}) = \gamma(\tau) \qquad \text{------} \ (6)$$

で表わされる。すなわち、上で述べた様な混乱は、時系列に対する定常，非定常を確率過程に対すると同様 (6) 式で考えたことによる。むろん時系列の確率構造が明確である場合は (6) 式を用いることは当然であるが、しかし不明確な場合、決め様がないわけであるが、例ば図-1を見てそこに何らかの非定常的なものを見い出すことも又否定し難い。それは結局、なんらかの意味である基準の時間間隔を無意識的に設定し、その区間の中と外での系列の様子を見ていることであると思われる。次にその数式化を試みる。

3. 時系列の定常性、非定常性

今、基準時間を T とすると、時系列に対する平均値、自己共分散を次のように定義する。

$$m_T(t) = \frac{1}{T}\int_0^T z(t-\tau)\,d\tau \ , \quad \gamma_T(t,\tau) = \frac{1}{T}\int_0^{T-\tau} z'(t-s)\,z'(t-s-\tau)\,ds \qquad \text{----} \ (7)$$

ただし $z'(t) = z(t) - m_T(t)$

時系列 $z(t)$ が定常であるとは、ある基準量 ε_T を決め、全観測時間を T_M とすると

$$\sigma_T^2 \equiv \frac{1}{T_M}\int_0^{T_M} (m_T(t) - M_z)^2 dt < \varepsilon_T \qquad \text{ただし } M_z = \frac{1}{T_M}\int_0^{T_M} m_T(t)\,dt$$

$$\delta_T^2 \equiv \frac{1}{T_M}\frac{1}{T}\int_0^{T_M} dt \int_0^T d\tau\,(\gamma(t,\tau) - R(\tau))^2 < \varepsilon_T \quad \text{ただし } R(\tau) = \frac{1}{T_M}\int_0^{T_M}\gamma(t,\tau)\,dt \qquad \text{----} \ (8)$$

ここで、次の様な量 $\sigma_T^2/R(0)$, $\delta_T^2/R(0)$ を考えると、この系列の非定常な度合を表わすだろう。この様な定義が前節で述べた自己回帰過程をどの様に改善するかは今後の問題として、少なくとも解析の出発点を (6) 式にとるか (8) 式にとるかは、あらかじめ明確にしておくことは必要であろう。

4. 非定常過程のスペクトル

時系列の解析において、自己回帰過程と並んで多く用いられる解析手法である非定常過程のスペクトル分解について、前節で述べた観点から若干の考察を行う。非定常スペクトルに関する定義や研究はこれまでも数多くなされており、それらを大別すると、定常確率過程に於るものの自然な拡張として、時間に依存する共分散関数のフーリエ変換によるものと、物理的なバンドパスフィルター系の出力で表わすもの、さらにそれらの中間的なものとして、フィルターの重み関数を半無限ステップ関数や、有限の矩型関数にとったものに別けられる。第一のものはその確率構造をあらかじめ知る必要があり、さらに一般的には正値関数とはならない。第二のものは、フィルタの設定の任意性のため統一的な考察が行いずらい。又、第三のものは、不確定事象に対するスペクトルとしては当然必要と思われる平均化操作がなんら考慮されていない。結局、(8) 式に基づく非定常時系列のスペクトルとしては、第二のものが最も適当であると思われるのであるが、いずれにしても、その出発点として、(6) 式をとるか (8) 式をとるかは常に明確にしておかなければならないと考える。

参考文献

1. G.E.P. Box & G.M. Jenkins ; Time series analysis – forecasting and control , Holden – Day , 1970
2. 日野，竹内，宍戸 ； 非定常スペクトルの定義および実際例 ，第30回土木学会年講 ，1975