II－35　周期的ガレルキン有限要素法による潮汐流れの解析

中央大学理工学部　正員　○川原　睦人
中央大学大学院　学生員　竹内　則雄
中央大学理工学部　正員　首藤　伸夫

1. 緒言

近年，環境問題などの観点から，浅海域の海水流動を把握することが非常に重要となってきている。ここではこの浅海域の海水の流動のうち，潮流のように周期的に同一挙動を示す準定常流れの数値解析について検討する。著者らは，時間に依存する有限要素解析法として，空間に関して有限要素法を，時間に関して2段階ラックス・ウェンドロフ法などを用いる方法を提案してきた。一方ここでは，潮流を周期的な準定常問題と考え，時間方向にフーリエ級数を用い，空間方向に有限要素法を適用する周期的ガレルキン法を提案する。この方法によれば，周期的な問題に対して，計算時間の短縮化をはかることができる。

2. 基礎方程式

粘性を考慮した運動の方程式と連続の方程式を海底から水面まで積分し，平均流速 u_i を用いることにより次の方程式を得る。

$$\dot{h} + (u_i h)_{,i} = 0 \tag{1}$$

$$\dot{u} + u_j u_{i,j} + g h_{,i} - \nu u_{i,jj} = 0 \tag{2}$$

ここで，h は水深を表わし，また，下付きの添字は i が1のとき x 方向の i が2のとき y 方向の成分を表わすものとし，同一項に同じ添字が繰返して表われるときは，総和規約に従いその最大個まで加え合わせるものとする。

3. 有限要素法

有限要素法の適用にあたり，ガレルキン法により変分方程式を誘導する。ガレルキン法は重み付き残差法の一つで，重みの形状関数を未知数の形状関数と同じに取る。この重み関数は，境界S上では零でその他では任意の値を取りうるものとする。この重み関数を(1)式(2)式に掛けて任意の領域について積分し加え合わせることにより次式を得る。

$$\int_v (h^* \dot{h})\, dv + \int_v \{h^* (u_i h)_{,i}\}\, dv = 0 \tag{3}$$

$$\int_v (u_i^* \dot{u}_i)\, dv + \int_v (u_i^* u_j u_{i,j})\, dv + \nu \int_v (u_{i,j}^* u_{i,j})\, dv + \int_v (u_i^* g h_{,i})\, dv = 0 \tag{4}$$

今，流れの場を有限個の三角形領域に分割し，この三角形状に分割された要素内において，流速あるいは潮位を近似する。有限要素内の任意の位置における未知数の値は，三角形の頂点の値を用いて次のように内挿補間される。

$$u_i = \Phi_\alpha u_{\alpha i} \qquad h = \Psi_\lambda h_\lambda \tag{5}$$

この内挿に用いる Φ_α や Ψ_λ は流速や潮位の分布状態を各要素内で近似する関数であり，形状関数と呼ばれる。ここでは，Φ_α に対しては2次の多項式を，Ψ_λ に対しては1次の多項式を用いた。同様に，重み関数についても同じ形状関数を用いて，

$$u_i^* = \Phi_\alpha u_{\alpha i}^* \qquad h^* = \Psi_\lambda h_\lambda^* \tag{6}$$

と表わす。(5)式(6)式を変分方程式(3)(4)式に代入して整理すると次の有限要素法の解式を得る。

$$A_{\lambda\mu} \dot{h}_\mu + B_{\lambda\alpha i\mu} u_{\alpha i} h_\mu = 0 \tag{7}$$

$$M_{\alpha\beta} \dot{u}_{\beta i} + K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j} u_{\gamma i} + S_{\alpha i\beta j} u_{\beta j} + H_{\alpha i\mu} h_\mu = 0 \tag{8}$$

ここで，(7)式(8)式に表われる係数は次のごとくである。

$$A_{\lambda\mu} = \int_v (\Psi_\lambda \Psi_\mu)\, dv, \quad B_{\lambda\alpha i\mu} = \int_v \{\Psi_\lambda (\Phi_\alpha \Psi_\mu)_{,i}\}\, dv$$

$$M_{\alpha\beta} = \int_v (\Phi_\alpha \Phi_\beta)\, dv, \quad K_{\alpha\beta\gamma j} = \int_v (\Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_{\gamma,j})\, dv$$

$$H_{\alpha i\mu} = \int_v (\Phi_\alpha \Psi_{\mu,i})\, dv, \quad S_{\alpha i\beta j} = \int_v (\Phi_{\alpha,i} \Phi_{\beta,j})\, dv$$

4. 周期的ガレルキン法

(7)式(8)式のごとく，空間方向に離散化された有限要素法の解式を流れの場全体で表わすと次のように表わされる。

$$G_\lambda = A_{\lambda\mu} \dot{h}_\mu + B_{\lambda\alpha\mu} u_\alpha h_\mu = 0 \tag{9}$$

$$F_\alpha = M_{\alpha\beta} \dot{u}_\beta + K_{\alpha\beta\gamma} u_\beta u_\gamma + S_{\alpha\beta} u_\beta + H_{\alpha\mu} h_\mu = 0 \tag{10}$$

(9)式(10)式のように半離散化された方程式を時間に関し

しても離散化するために，次のような仮定を設ける。

$$h_\mu = h_\mu^{(0)} + \sum_{n=1}^{N} c_\mu^{(n)} \sin(n\omega t) + \sum_{n=1}^{N} d_\mu^{(n)} \cos(n\omega t) \qquad (11)$$

$$U_\alpha = U_\alpha^{(0)} + \sum_{n=1}^{N} a_\alpha^{(n)} \sin(n\omega t) + \sum_{n=1}^{N} b_\alpha^{(n)} \cos(n\omega t) \qquad (12)$$

これは，流れが準定常であるとして，潮位，流速をフーリエ級数に展開したものである。この関係を(9)式(10)式に代入して整理する0次オーダーに関して次の関係を得る。

$$B_{\lambda\alpha\mu} U_\alpha^{(0)} h_\mu^{(0)} = 0 \qquad (13)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma} U_\beta^{(0)} U_\gamma^{(0)} + S_{\alpha\beta} U_\beta^{(0)} + H_{\alpha\mu} h_\mu^{(0)} = 0 \qquad (14)$$

また，高次の項についても，

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F_\alpha(\omega) \cos(i\omega t)\, dt = 0, \quad \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F_\alpha(\omega) \sin(i\omega t)\, dt = 0$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} G_\lambda(\omega) \cos(i\omega t)\, dt = 0, \quad \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} G_\lambda(\omega) \sin(i\omega t)\, dt = 0$$

なる関係を用いて整理すると次の関係を得る。

$$\begin{aligned} & M_{\alpha\beta} \sum_{j=1}^{N} j\omega a_\beta^{(j)} \delta_1(j,i) + K_{\alpha\beta\gamma} U_\beta^{(0)} \sum_{j=1}^{N} b_\gamma^{(j)} \delta_1(j,i) \\ & + K_{\alpha\beta\gamma} U_\gamma^{(0)} \sum_{j=1}^{N} b_\beta^{(j)} \delta_1(j,i) \\ & + K_{\alpha\beta\gamma} \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_\beta^{(k)} a_\gamma^{(j)} \cdot \frac{1}{2} \{ \delta_1(k-j,i) - \delta_1(k+j,i) \} \\ & + K_{\alpha\beta\gamma} \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} b_\beta^{(k)} a_\gamma^{(j)} \cdot \frac{1}{2} \{ \delta_1(k+j,i) - \delta_1(k-j,i) \} \\ & + S_{\alpha\beta} \sum_{j=1}^{N} b_\beta^{(j)} \delta_1(j,i) + H_{\alpha\mu} \sum_{j=1}^{N} d_\mu \delta_1(j,i) = 0 \end{aligned} \qquad (15)$$

$$\begin{aligned} & -M_{\alpha\beta} \sum_{j=1}^{N} j\omega b_\beta^{(j)} \delta_2(j,i) + K_{\alpha\beta\gamma} U_\beta^{(0)} \sum_{j=1}^{N} a_\gamma^{(j)} \delta_2(j,i) \\ & + K_{\alpha\beta\gamma} U_\gamma^{(0)} \sum_{j=1}^{N} a_\beta^{(j)} \delta_2(j,i) \\ & + K_{\alpha\beta\gamma} \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_\beta^{(k)} a_\gamma^{(j)} \cdot \frac{1}{2} \{ \delta_2(k+j,i) + \delta_2(k-j,i) \} \\ & + K_{\alpha\beta\gamma} \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_\beta^{(k)} a_\gamma^{(j)} \cdot \frac{1}{2} \{ \delta_2(k+j,i) - \delta_2(k-j,i) \} \\ & + S_{\alpha\beta} \sum_{j=1}^{N} a_\beta^{(j)} \delta_2(j,i) + H_{\alpha\mu} \sum_{j=1}^{N} d_\mu^{(j)} \delta_2(j,i) = 0 \end{aligned} \qquad (16)$$

$$\begin{aligned} & A_{\lambda\mu} \sum_{j=1}^{N} j\omega c_\mu^{(j)} \delta_1(j,i) + B_{\lambda\alpha\mu} U_\alpha^{(0)} \sum_{j=1}^{N} d_\mu^{(j)} \delta_1(j,i) \\ & + B_{\lambda\alpha\mu} h_\mu^{(0)} \sum_{j=1}^{N} b_\alpha^{(j)} \delta_1(j,i) \\ & + B_{\lambda\alpha\mu} \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_\alpha^{(k)} c_\mu^{(j)} - \{ \delta_1(k-j,i) + \delta_1(k+j,i) \} \\ & + B_{\lambda\alpha\mu} \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} b_\alpha^{(k)} d_\mu^{(j)} - \{ \delta_1(k+j,i) + \delta_1(k-j,i) \} \\ & = 0 \end{aligned} \qquad (17)$$

$$\begin{aligned} & -A_{\lambda\mu} \sum_{j=1}^{N} j\omega d_\mu^{(j)} \delta_2(j,i) + B_{\lambda\alpha\mu} U_\alpha^{(0)} \sum_{j=1}^{N} c_\mu^{(j)} \delta_2(j,i) \\ & + B_{\lambda\alpha\mu} h_\mu^{(0)} \sum_{j=1}^{N} a_\alpha^{(j)} \delta_2(j,i) \\ & + B_{\lambda\alpha\mu} \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_\alpha^{(k)} d_\mu^{(j)} - \{ \delta_2(k+j,i) + \delta_2(k-j,i) \} \\ & + B_{\lambda\alpha\mu} \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} b_\alpha^{(k)} c_\mu^{(j)} - \{ \delta_2(k+j,i) - \delta_2(k-j,i) \} \\ & = 0 \end{aligned} \qquad (18)$$

ここで

$$\delta_1(k,j) = \begin{cases} 1 & k=j \\ 1 & k=-j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad \delta_2(k,j) = \begin{cases} 1 & k=j \\ -1 & k=-j \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

なる関係を保つものとする。

以上により，空間に対しても時間に対しても完全に離化された方程式(13)式～(18)式を得ることができ，これより係数a_α, b_α, c_μ, d_μを計算し，その結果を(11)式(12)式に代入して潮位と流速を求めることができる。

5．数値計算例　図1は4で述べた解式を用いることにより，フラスコ型の湾を想定して計算した流速図である。このフラスコ型の湾は平均水深が10mで，水平で滑らかな底面を有しているものとする。初期状態として流速，潮位とも零と仮定し，湾口に次の潮位を与えた。

$$h = a \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \qquad (19)$$

ここで，aは振幅で0.5 m　Tは周期で12時間とする。なお図では著者らの計算した2段階ラックス・ウェンドロフ有限要素法と比較をしている。良い一致を示しているものと思われる。図2は湾中央部の潮位と流速をプロットしたもので，この間に半周期の位相のずれが表われている。この関係は，一般に潮位と流速の間の関係として良く知られているものと一致する。

図1　Finite Element Idealization and Computed velocity by 2step Lax-Wendroff Method and Periodic Galerkin Method

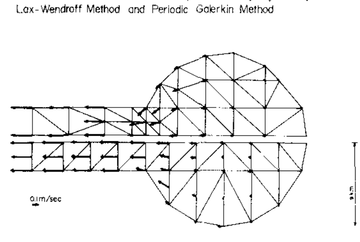
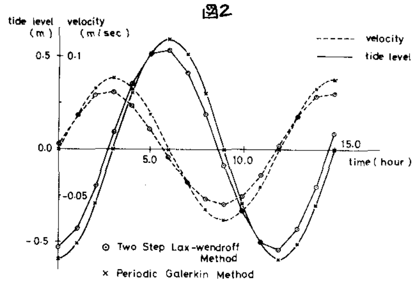


図2



6．結言

時間に依存する有限要素解析のうち，周期的な準定常問題に対する場合をガレルキン法によって解析する方法を提案した。特に，周期的な問題に対しては，安定性がよく，しかも計算時間の短縮化をはかることができるという方法であるということができる。