

中央大学理工学部 正員 首藤 伸夫

〃 〃 〇 学生員 森 龍三

1. まえがき

長波が図-1に示すような海底地形の変化する所を通過する際の波高変化について、斜面からの反射波を考慮に入れた線型理論を用いて波高を求め実験値と比較を行なった。

波を微小振幅長波として扱い、斜面を図-1のように三つの領域に分割して各領域における方程式の解を求め $x=x_1$, $x=x_2$ の断面で接続した。

2. 基本方程式

幅員を単位幅とする。

$$\text{運動の方程式} \quad u_t + g\eta_x = 0 \quad \text{-----①}$$

$$\text{連続の方程式} \quad \eta_t + (uh)_x = 0 \quad \text{-----②}$$

①式と②式から u を消去して、 $\eta = H(x)e^{i\omega t}$ を用いれば

$$\eta_{xx} + \frac{h_x}{h}\eta_x + \frac{\omega^2}{gh}\eta = 0 \quad \text{-----③}$$

3. 各領域における方程式

$$\text{(I)} \quad x \leq x_1 \quad h = h_1$$

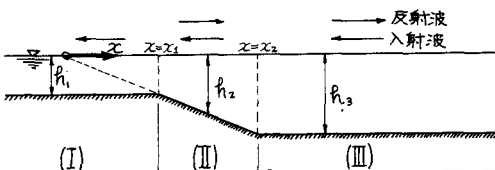
$$\eta_{xx} + \frac{\omega^2}{gh_1}\eta = 0$$

$$\text{(II)} \quad x_1 \leq x \leq x_2 \quad h = h_2 = a \cdot x$$

$$\eta_{xx} + \frac{1}{x}\eta_x + \frac{\omega^2}{ga} \cdot \frac{1}{x}\eta = 0$$

$$\text{(III)} \quad x_2 \leq x \quad h = h_3$$

$$\eta_{xx} + \frac{\omega^2}{gh_3}\eta = 0$$



a は斜面の勾配($=1/30$) $h_1 = 10, 15, 20 \text{ cm}$ $h_2 = 40, 45, 50 \text{ cm}$ 図-1

4. 各領域における解

(I)の領域では透過波のみ, (II), (III)の領域では斜面からの反射波と, 入射波の二種類の波があると考えた。よって各領域での解を示すと,

$$\text{(I)} \quad \eta_1 = Ee^{ik_1x} \quad \text{-----④}$$

$$\text{(II)} \quad \eta_2 = C N_0(2n\sqrt{x}) + D J_0(2n\sqrt{x}) \quad \text{-----⑤}$$

$$\text{(III)} \quad \eta_3 = Ae^{ik_3x} + Be^{ik_3x} \quad \text{-----⑥}$$

A, B, C, D, E は積分定数

$$n = \omega/\sqrt{ga} \quad k = \omega/\sqrt{gh}$$

k 及 n の添字は領域を表わす。

$N_0()$, $J_0()$ は0階のNeumann, Bessel関数

5. 解の接続

$x=x_1$, $x=x_2$ でそれぞれ波形と流量が連続している事から,

$$\begin{aligned} x=x_1 \quad \eta_1 &= \eta_2 & x=x_2 \quad \eta_2 &= \eta_3 \\ \eta_{1x} &= \eta_{2x} & \eta_{2x} &= \eta_{3x} \end{aligned}$$

そこで, 入射波高として A の値を与えることにすると, 下記の如く B, C, D, E を未知数とする四元一次の連立方程式が求まる。

$$\begin{pmatrix} 0 & N_{0,1} & J_{0,1} & -e^{ik_1x_1} \\ 0 & na\sqrt{x_1}N_{1,1} & na\sqrt{x_1}J_{1,1} & iha\sqrt{x_1}e^{ik_1x_1} \\ -e^{ik_3x_2} & N_{0,2} & J_{0,2} & 0 \\ -iha\sqrt{x_2}e^{ik_3x_2} & na\sqrt{x_2}N_{1,2} & na\sqrt{x_2}J_{1,2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \\ D \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Ae^{ik_3x_2} \\ -Aih\sqrt{x_2}e^{ik_3x_2} \end{pmatrix} \quad \text{-----⑦}$$

添字の説明

$$N_{0,1} \longrightarrow N_0(2n\sqrt{x_1})$$

$$J_{0,1} \longrightarrow J_0(2n\sqrt{x_1})$$

6. 斜面上での波高変化

⑦式をC, Dについて解き, ⑤式に代入すると,

$$\eta_2 = \frac{2 \cdot A}{H + I + i(J + K)} \left\{ (-J_{01} + iJ_{11}) N_0(2\eta\sqrt{x}) \right. \\ \left. + (N_{01} - iN_{11}) J_0(2\eta\sqrt{x}) \right\} e^{i k_3 x_2} \quad \text{⑧}$$

$$H = k_1 k_3 k_2 (N_{11} J_{1,2} - N_{1,2} J_{1,1})$$

$$I = k_1 k_3 k_2 (N_{01} J_{0,2} - N_{0,2} J_{0,1})$$

$$J = k_1 k_3 k_2 (N_{01} J_{1,2} - N_{1,2} J_{0,1})$$

$$K = k_1 k_3 k_2 (N_{0,2} J_{1,1} - N_{1,1} J_{0,2})$$

Bessel, Neumann関数を次の漸近展開式を用いて近似する。例えば,

$$J_0 = \sqrt{\frac{1}{\pi \eta \sqrt{x}}} \left\{ \cos(2\eta\sqrt{x} - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{16\eta\sqrt{x}} \sin(2\eta\sqrt{x} - \frac{\pi}{4}) \right\}$$

$$N_0 = \sqrt{\frac{1}{\pi \eta \sqrt{x}}} \left\{ \sin(2\eta\sqrt{x} - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{16\eta\sqrt{x}} \cos(2\eta\sqrt{x} - \frac{\pi}{4}) \right\}$$

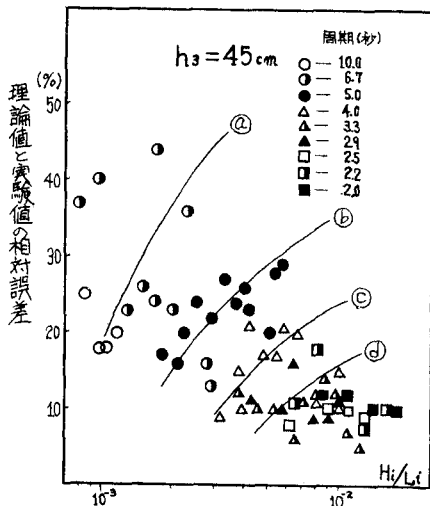
を, ⑧式に代入して η_2 の絶対値をとると,

$$|\eta_2| = A \sqrt{\frac{x_2}{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{4\eta x_1} \sin 4\eta(\sqrt{x} - \sqrt{x_1})}$$

④式が斜面からの反射波を考慮に入れた場合の, 斜面上を通過する微小振幅長波の波高を与える式である。

尚, ④式の大きな $\sqrt{\quad}$ の中の $\sin$ の項が反射の影響を表わし, この項を無視すると入射波だけを扱った Green の定理に一致する。

図-2



l は斜面の底辺長

$$l/L$$

$$\text{② } 0.43$$

$$\text{③ } 0.57$$

$$\text{④ } 0.71$$

$$\text{⑤ } 0.98$$

7. 実験値との比較と考察

図-4は④式から得られる理論値と実験値との相対誤差の総和を測点の数で除したものを縦軸にとり, 横軸を実験波の入射波の波形勾配としたもので, パラメータは反射率である。図-3は理論値と実験値との比較で縦軸に波高, 横軸に測点番号をとったものである。図-2はパラメータを周期として, 図-4と同様に軸をとった。

斜面上を波が通過する際に, 波高は単調に増加せず, 反射波の影響によって図-3に見られる挙動を示すことがわかった。図-2において図上に引いた曲線は, 斜面の底辺長と波長との比が同一である実験値を区分したものである。特にこの図で●印に注目すると周期が一定の時波形勾配が1になるほど理論値に近づく傾向がわかる。又波形勾配を固定して見ると周期の短い波ほど理論値に近づく。図-4からは反射率が5~15%の間で, かつ波形勾配が大きい波ほど理論値に近くなることがわかる。

今後は波の扱いを, 微小振幅から有限振幅にして厳密性を期したいと思う。尚, 今回の実験を担当された当時学生であった相木 茂忠君, 道正 尚志君に感謝の意を表する。

図-3

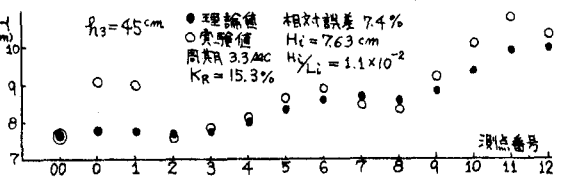


図-4

