

京都大学工学部

正員 岩垣雄一

大阪府立工業高等専門学校

正員 平山秀夫

1. はしがき：著者らは、ここ数年来、重複波動中における底質の浮遊機構を解明するため、種々の検討をしてきている。これまですでに、沈降速度を有する単一粒子の重複波動中での運動を実験的に調べ、その運動が大イライ一的に示された波動理論によってどの程度説明されるかを検討するため、差分法を用いて理論軌跡などを算出した。ここでは、重複波動中における単一粒子の速度や軌跡を解析的に求めて、従来の差分法による結果や実験と比較し、解析的方法の適合性を検討する。

2. 基礎理論：いま、単一粒子の運動を x - z 平面での2次元運動と考えると、時刻 $t=0$ における位置を (x_0, z_0) で表わし、 $t=t$ における水平および鉛直方向のラグランジュ速度をそれぞれ $U(x, z, t)$ および $W(x, z, t)$ とすれば、時刻 t におけるこの粒子の位置 (x, z) は次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \int_0^t U(x_0, z_0, t) dt \\ z &= z_0 + \int_0^t W(x_0, z_0, t) dt \end{aligned} \right\} \text{-----}(1)$$

ここで、 $x = x_0 + \Delta x$ および $z = z_0 + \Delta z$ とおけば、

$$\Delta x = \int_0^t U(x_0, z_0, t) dt, \quad \Delta z = \int_0^t W(x_0, z_0, t) dt \text{-----}(2)$$

となる。さて、単一粒子が重複波動中を運動する場合、水平方向には、水粒子の水平速度成分で、鉛直方向には水粒子の鉛直速度と単一粒子の静水巾での沈降速度との和で運動すると仮定すれば、 $t=t$ で位置 (x, z) に達した単一粒子のラグランジュ速度成分 $U(x, z, t)$ と $W(x, z, t)$ は、流体場のオイラー流速成分 $u(x, z)$ と $w(x, z)$ や静水巾での単一粒子の沈降速度 $w_f (w_f < 0)$ とから、次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} U(x, z, t) &= u(x_0 + \Delta x, z_0 + \Delta z, t) \\ W(x, z, t) &= w(x_0 + \Delta x, z_0 + \Delta z, t) + w_f \end{aligned} \right\} \text{-----}(3)$$

この式(3)の右辺を Taylor 展開すれば、

$$\left. \begin{aligned} U &= u(x_0, z_0, t) + \Delta x \frac{\partial u(x_0, z_0, t)}{\partial x} + \Delta z \frac{\partial u(x_0, z_0, t)}{\partial z} + \dots \\ W &= w_f + w(x_0, z_0, t) + \Delta x \frac{\partial w(x_0, z_0, t)}{\partial x} + \Delta z \frac{\partial w(x_0, z_0, t)}{\partial z} + \dots \end{aligned} \right\} \text{-----}(4)$$

となる。いま、 ϵ を微小量として、 u, w, U および W を、

$$\left. \begin{aligned} u &= \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \epsilon^3 u_3 + \dots \\ w &= \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + \epsilon^3 w_3 + \dots \\ U &= U_0 + \epsilon U_1 + \epsilon^2 U_2 + \dots \\ W &= W_0 + \epsilon W_1 + \epsilon^2 W_2 + \dots \end{aligned} \right\} \text{-----}(5)$$

のように仮定し、式(5)と(2)の関係を式(4)に代入して、 ϵ の同じべき数の項にかかる係数を整理すれば、結局、 $U(x, z, t)$ および $W(x, z, t)$ は次式のようになる。

$$U = \epsilon \left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} \int_0^t u_1 dt \right) + \epsilon^2 \left\{ u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x} \left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} \int_0^t u_1 dt \right) + \frac{\partial u_1}{\partial z} \int_0^t u_1 dt + \frac{\partial u_1}{\partial z} \left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} \int_0^t u_1 dt \right) \right\} + O(\epsilon^3) \text{-----}(6)$$

$$W = w_f + \epsilon \left(w_1 + \frac{\partial w_1}{\partial x} \int_0^t w_1 dt \right) + \epsilon^2 \left\{ w_2 + \frac{\partial w_2}{\partial x} \left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} \int_0^t u_1 dt \right) + \frac{\partial w_1}{\partial z} \int_0^t w_1 dt + \frac{\partial w_1}{\partial z} \left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} \int_0^t u_1 dt \right) \right\} + O(\epsilon^3) \text{-----}(7)$$

一方、単一粒子の t 時間後の水平および鉛直方向の変位(軌跡)は、式(6)および(7)を用いて、式(2)から、それぞれ次式のように表わされる。

$$\Delta x = \epsilon \int_0^t \left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} \int_0^t u_1 dt \right) dt + \epsilon^2 \left\{ \int_0^t \left\{ u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x} \left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} \int_0^t u_1 dt \right) + \frac{\partial u_1}{\partial z} \int_0^t u_1 dt + \frac{\partial u_1}{\partial z} \left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} \int_0^t u_1 dt \right) \right\} dt \right\} + O(\epsilon^3) \text{-----}(8)$$

$$\Delta z = \int_0^t w_f dt + \epsilon \int_0^t \left(w_1 + \frac{\partial w_1}{\partial x} \int_0^t w_1 dt \right) dt + \epsilon^2 \left\{ \int_0^t \left\{ w_2 + \frac{\partial w_2}{\partial x} \left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} \int_0^t u_1 dt \right) + \frac{\partial w_1}{\partial z} \int_0^t w_1 dt + \frac{\partial w_1}{\partial z} \left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} \int_0^t u_1 dt \right) \right\} dt \right\} + O(\epsilon^3) \text{-----}(9)$$

以上の式(6)~(9)が、沈降速度を有する単一粒子が流体速度場を運動する場合の速度と軌跡を解析的に求める基礎式である。

3. 重複波動中における解析解

(1) 微小振幅波動理論による場合

ϵ^2 以上の高次項を微小として省略し、かつ $\epsilon = H/2$ とする。微小振幅重複波動理論では、

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \pi(\sigma/k) \left\{ \cosh k(h+z)/\sinh kh \right\} \cdot \sin kx_0 \cdot \sin \sigma t \\ w_1 &= -\pi(\sigma/k) \left\{ \sinh k(h+z)/\sinh kh \right\} \cdot \cos kx_0 \cdot \sin \sigma t \end{aligned} \right\} \text{-----}(10)$$

であるから、これらの式を式(6)~(9)に代入して整理すれば、結局、 ϵ のオーダーまでの浮遊粒子の速度および

軌跡は、それぞれ次式のように表わされる。

$$U = (H/L) \{ \pi \alpha / \sinh kh \} \cdot \sin kx_0 \cdot \sin \alpha t \cdot \{ \cosh k(h+z_0)/k + w_j \cdot t \cdot \sinh k(h+z_0) \} \quad (11)$$

$$W = -(H/L) \{ \pi \alpha / \sinh kh \} \cdot \cos kx_0 \cdot \sin \alpha t \cdot \{ \sinh k(h+z_0)/k + w_j \cdot t \cdot \cosh k(h+z_0) \} + w_j \quad (12)$$

$$\Delta X = (H/L) \{ \cosh k(h+z_0) / \sinh kh \} \cdot \sin kx_0 \cdot (1 - \cos \alpha t) + (H/L) \cdot w_j \cdot \pi \{ \sinh k(h+z_0) / \sinh kh \} \cdot \sin kx_0 \times (-t \cdot \cos \alpha t + \sin \alpha t / \alpha) \quad (13)$$

$$\Delta Z = w_j \cdot t + (H/L) \cdot \{ \sinh k(h+z_0) / \sinh kh \} \cdot \cos kx_0 \cdot (\cos \alpha t - 1) + (H/L) \cdot w_j \cdot \pi \{ \cosh k(h+z_0) / \sinh kh \} \cdot \cos kx_0 \times (t \cdot \cos \alpha t - \sin \alpha t / \alpha) \quad (14)$$

(2) 有限振幅波理論による場合

ここでは、有限振幅重複波理論の式(2)の近似解を用いて、式(6)~(9)の Δ の α - γ までの近似解を求める。

いま、(1)の場合と同様にして、 $E = H/L$ とすれば、有限振幅重複波理論から、 u_0 および w_0 はそれぞれ次式のように与えられる(u_0 および w_0 は式(10)で与えられている)。

$$u_0 = -\frac{3}{8} \pi \cdot \frac{\alpha \cosh k(h+z_0)}{k \cosh^2 kh} \cdot (1 - \coth^2 kh) \cdot \sin 2kx_0 \cdot \sin 2\alpha t \quad (15)$$

$$w_0 = \frac{3}{8} \pi \cdot \frac{\alpha \sinh 2k(h+z_0)}{k \cosh^2 kh} \cdot (1 - \coth^2 kh) \cdot \cos 2kx_0 \cdot \sin 2\alpha t \quad (16)$$

これらの式と式(10)と式(6)~(9)で示される Δ の α - γ までの各項に代入して整理すれば、任意時刻 t における、単一粒子の速度成分(U, W)および初期位置からの変位量($\Delta X, \Delta Z$)は、結局、次式のように求まる。

$$U = (H/L) \{ \pi \alpha / \sinh kh \} \sin kx_0 \cdot \sin \alpha t \cdot \{ \cosh k(h+z_0)/k + w_j \cdot t \cdot \sinh k(h+z_0) \} + (H/L)^2 \cdot (3/8) \pi^2 \alpha \cdot (1 - \coth^2 kh) / \cosh^2 kh \cdot \sin 2kx_0 \cdot \sin 2\alpha t \cdot \{ \cosh 2k(h+z_0)/k + 2w_j \cdot t \cdot \sinh 2k(h+z_0) \} + (H/L)^2 \cdot (\pi^2 / 2k \sinh^2 kh) \cdot \sin 2kx_0 \times \sin 2\alpha t \cdot (1 - \cos \alpha t) \quad (17)$$

$$W = -(H/L) \{ \pi \alpha / \sinh kh \} \cos kx_0 \cdot \sin \alpha t \cdot \{ \sinh k(h+z_0)/k + w_j \cdot t \cdot \cosh k(h+z_0) \} + (H/L)^2 \cdot (3/8) \pi^2 \alpha \cdot (1 - \coth^2 kh) / \cosh^2 kh \cdot \cos 2kx_0 \cdot \sin 2\alpha t \cdot \{ \sinh 2k(h+z_0)/k + 2w_j \cdot t \cdot \cosh 2k(h+z_0) \} + (H/L)^2 \cdot (\pi^2 / 2k) \cdot (\sin \alpha t / \sinh^2 kh) \cdot \{ (\alpha/k) \times \sinh 2k(h+z_0) \cdot (1 - \cos \alpha t) + 2w_j \{ \cosh^2 k(h+z_0) - \sinh^2 kx_0 \} \times (-t \cdot \alpha \cdot \cos \alpha t + \sin \alpha t / \alpha) \} + w_j \quad (18)$$

$$\Delta X = (H/L) \cdot \{ \cosh k(h+z_0) / \sinh kh \} \cdot \sin kx_0 \cdot (1 - \cos \alpha t) + (H/L) \cdot w_j \cdot \pi \{ \sinh k(h+z_0) / \sinh kh \} \sin kx_0 \cdot (-t \cdot \cos \alpha t + \sin \alpha t / \alpha) + (H/L)^2 \cdot (3\pi^2 / 16k) \cdot \{ (1 - \coth^2 kh) / \cosh^2 kh \}$$

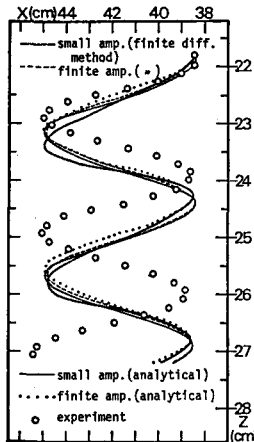
$$\times \sin 2kx_0 \cdot \{ \cosh 2k(h+z_0) \cdot (\cos 2\alpha t - 1) + 2k w_j \times \sinh 2k(h+z_0) \cdot (t \cos 2\alpha t - \sin 2\alpha t / 2\alpha) \} + (H/L)^2 \cdot \{ \pi^2 \sin 2kx_0 / (8k \sinh^2 kh) \} \cdot \sin 2kx_0 \times (-4 \cos \alpha t + \cos 2\alpha t + 3) \quad (19)$$

$$\Delta Z = w_j \cdot t + (H/L) \cdot \{ \sinh k(h+z_0) / \sinh kh \} \cdot \cos kx_0 \times \{ \cos \alpha t - 1 \} + (H/L) \cdot w_j \cdot \pi \{ \cosh k(h+z_0) / \sinh kh \} \times \cos kx_0 \cdot (t \cdot \cos \alpha t - \sin \alpha t / \alpha) + (H/L)^2 \cdot (3/16) \cdot (\pi^2 / k) \times \{ (1 - \coth^2 kh) / \cosh^2 kh \} \cdot \cos 2kx_0 \cdot \{ \sinh 2k(h+z_0) \times (1 - \cos 2\alpha t) + 2k w_j \cdot \cosh 2k(h+z_0) \cdot (-t \cdot \cos 2\alpha t + \sin 2\alpha t / 2\alpha) \} + (H/L)^2 \cdot (\pi^2 / 8k) \cdot (1 / \sinh^2 kh) \times \{ \alpha \cdot \sinh 2k(h+z_0) \cdot (-4 \cos \alpha t + \cos 2\alpha t + 3) + w_j \cdot k \times \{ \cosh^2 k(h+z_0) - \sinh^2 kx_0 \} \cdot (2\alpha t \cdot \cos 2\alpha t - 3 \sin 2\alpha t + 4\alpha t) \} \quad (20)$$

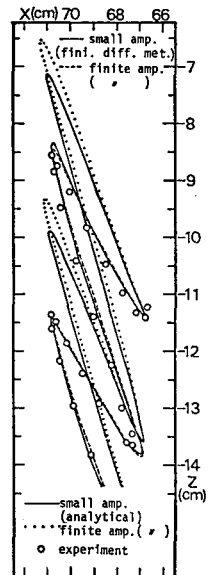
式中の——線部分は(1)で述べた微小振幅波理論による場合の結果である。

4. 計算結果と従来の結果との比較

以上の解析的手法による結果と、従来の差分法による結果や実験結果と比較したのが図-1(1), (2)である。これらの図から明らかなように、節近傍を除けば、両計算手法による差異がかなり著しく、また用いる波動理論によっても若干の差異が見られる。これは、単一粒子の運動の変位量が、Taylor展開による近似式の適用限界をこえていることによるものと考えられる。なお、式(6)~(9)の基本式の誘導は、野田英明教授(鳥取大)によるところが99%、ここに心から謝意を表します。



(1) $kx \approx \pi/2$ (節)



(2) $kx \approx 3\pi/4$