

神戸大学工学部 正員 松梨順三郎
 神戸大学工学部 正員 神吉 和夫
 神戸大学大学院 ○ 学生員 中井 茂喜

1. まえがき

有限要素法は1940年代に航空機の構造解析に利用されて以来、急速に進歩してきた。現在ではほとんどの工学分野で応用されている。固体力学で応用されている有限要素法は変分原理に基づいている。しかし、現象を支配する微分方程式をオイラーの方程式とする汎関数を得ることは一般に難しい。そこで流体問題では有限要素法の一つと考えられる重みつき残差法(ガラーキン法)によって定式化を進めて解析を行う手法が多く用いられ、この手法によって潮流解析、Navier-Stokes 流れの解析、波動問題などが取り扱われている。本報では線形一次元波動方程式を対象として、ガラーキン法を用いて定式化を進め、時間に関して有限要素法および差分による両方法とを採り用いてそれぞれの数値解を得るとともに、その解析解との比較検討を行った。さらに、その結果を考慮して、大阪湾の潮流問題への適用を試みた。

2. 線形一次元波動の基礎方程式とその定式化

対象とする現象は簡単のため一次元微小振幅波とする。その基礎方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial h}{\partial t} + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

u は流速、 H は海底から静水面までの高さ、 h は静水面から水面までの高さ、 g は重力加速度である。

領域を n_e 個の有限要素に分割し、要素内での u 、 h の近似式を次式で表現する。ただし、ここでは一様な静水深であると、 H を一定とする。

$$u_a = [N_1 \ N_2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad h_a = [N_1 \ N_2] \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

ここに、

$$N_1 = 1 - (x - x_k) / \Delta x, \quad N_2 = (x - x_k) / \Delta x$$

(2)式を(1)式に代入し、形状関数(重み関数) N_1 あるいは N_2 を掛けた部分領域にわたって積分する。重みつき残差法によると、これを全要素にわたって加え合わせたものは零でなければならない。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{A^e} N_i \left(\frac{\partial u_a}{\partial t} + g \frac{\partial h_a}{\partial x} \right) dA^e &= 0 \\ \sum_{e=1}^{n_e} \int_{A^e} N_i \left(\frac{\partial h_a}{\partial t} + H \frac{\partial u_a}{\partial x} \right) dA^e &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(3)式を行列表示すると次式になる。

$$C_1^* \dot{u} + F_1^* h = 0, \quad C_2^* \dot{h} + F_2^* u = 0 \quad (3')$$

・は時間微分を表わし、 C_1^* 、 C_2^* 、 F_1^* 、 F_2^* はいずれも $(k \times k)$ の行列、 u 、 h は $(k \times 1)$ の列ベクトルを表わす。 k は全節点数である。これらをまとめると、

$$C^* \dot{q} + F^* q = 0 \quad (4)$$

ただし、 $q = \begin{Bmatrix} u \\ h \end{Bmatrix}$ 、 $\dot{q} = \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{h} \end{Bmatrix}$ である。

3. 時間積分

(a) 有限要素 前節と同様の定式化を行い、1時間要素に對して(4)式の積分式を求めると次のようになる。

$$\left\{ C^* + \frac{2\Delta t}{3} F^* \right\} q_{t_{k+1}} = \left\{ C^* - \frac{\Delta t}{3} F^* \right\} q_{t_k} \quad (5)$$

(b) 差分法 前進差分、後退差分、中央差分によると(4)式はそれぞれ次のように Explicit scheme によつて与えられる。

$$C^* q_{t_{k+1}} = \left\{ C^* - \Delta t F^* \right\} q_{t_k} \quad (6)$$

$$\left\{ C^* + \Delta t F^* \right\} q_{t_{k+1}} = C^* q_{t_k} \quad (7)$$

$$\left\{ C^* + \frac{\Delta t}{2} F^* \right\} q_{t_{k+1}} = \left\{ C^* - \frac{\Delta t}{2} F^* \right\} q_{t_k} \quad (8)$$

t_k レベルの q の値を既知として、 t_{k+1} レベルでの q の値はこれらの関係式によつて求めることができる。

4. 数値計算例

対象領域は 90 m で、分割領域 $\Delta x = 5\text{ m}$ 、静水深 $H = 10\text{ m}$ 、重力加速度 $g = 10\text{ m/s}^2$ 、時間間隔 $\Delta t = 0.2\text{ s}$ とした。

例1. 初期条件 $0 \leq x \leq 90 \quad u, h = 0 \quad t = 0$

境界条件 $x = 0 \quad u, h = \sin t \quad t > 0$

この時の解析解は $u, h = \sin(t - 0.1x)$ である。(5)(7)(8)式を用いた計算結果を図-1、図-2、図-3に示す。7.0秒後の u, h をプロットした。有限要素のFEM解と解析解は同位相であるが、振幅が波の前面に接近するにつれて次第に減衰する。後退差分では同様な傾向があるが、有限要素より減衰が大きい。中央差分では減衰しない。前進差分では思わしい結果が得られなかった。

例2. 境界条件 $x = 0 \quad h = \sin t \quad t > 0$

$x = 90 \quad u = 0 \quad t > 0$

初期条件は例1と同様で中央差分を用いて計算を行い、7.0秒後の u, h をプロットした(図-4)。

5. 結論およびおわりに

以上の結果によつて、時間積分に對しては、前進差分、後退差分、有限要素を用いるよりも、中央差分を用いた方が高精度が得られることがわかった。なお、前報告¹⁾では時空間要素をプリズム形に表現して、形状関数 ϕ_k を x, y 平面で線形である形状関数 θ_k と時間軸に對して線形である形状関数 θ_k^t の積として与えたが、この手法は時間内に有限要素を適用する場合と同等であることが確かめられた。前報の内容は大阪湾の潮流解析へのFEMの適用であるが、以上のことからプリズム形の時空間要素表現の代りに、時間内に中央差分をとる表現(式(8))を採用して再計算を進めた。その結果については講演時に発表する。

参考文献 1) 松梨順三郎、矢部泰久；有限要素法による不定流解析について；第21回学術講演論文集

2) 坂井藤一、河合三四郎；波動解析への有限要素法の適用；第20回海岸工学講演会論文集

3) Gallagher R.H., Oden J.T., Taylor C. and Zienkiewicz O.C.; Finite Elements in Fluids Volume 1

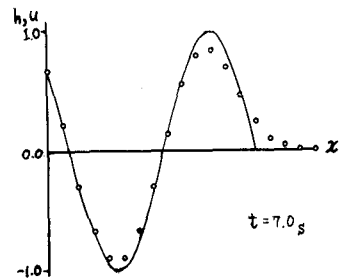


図-1 正弦波伝播(有限要素)

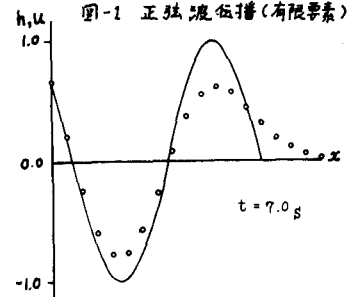


図-2 正弦波伝播(後退差分)

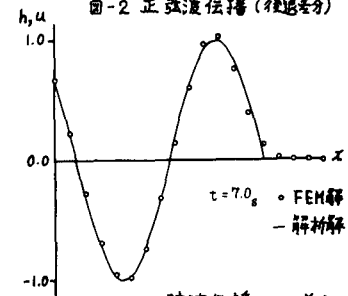


図-3 正弦波伝播(中央差分)

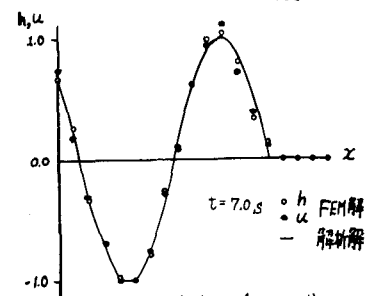


図-4 正弦波伝播(中央差分)