I-316 幾何計画法の応用に関する一考察

室蘭工業大学 正員 杉本博之

1. まえがき 1960年代の初期，Zenerにより開発された幾何計画法は，その後大きな発達を遂げ，最近では最も注目されている非線形計画法の一つである。

この方法は，制約条件，目的関数が多項式からなる最適問題を，線形方程式の解のみを要求する双対問題に置換する手法であり，各方面で研究，応用されている[2), 3), 4)]。

本文は，幾何計画法の概要，および近似関数を用いる方法を，簡単な計算例と共に説明し，今後の幾何計画法の応用に関して考察を加えようとするものである。

幾何計画法の詳細については，文献1)，5)，6)を参照されたい。

2. 幾何計画法 幾何計画法は，一般的に次のように定義される。

〈主問題〉 制約条件 $h_m(\mathbf{x}) \leq \sigma_m \ (=\pm 1)$; $m=1\sim M$ (1)

のもとで，目的関数 $h_0(\mathbf{x})$ を最小にする設計変数 $\mathbf{x}$ の決定。

ここで，

$$h_m(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^{T_m} \sigma_{mt} C_{mt} \prod_{n=1}^{N} x_n^{a_{mtn}} \ ; \ m=0,1,\cdots,M \tag{2}$$

$$\sigma_{mt} = \pm 1 \ , \ C_{mt} > 0 \ ; \ m=0,1,\cdots,M \ , \ t=1,\cdots,T_m \tag{3}$$

$$x_n > 0 \ ; \ n=1,\cdots,N \tag{4}$$

〈双対問題〉 上の主問題は，次のように双対問題に変換される。

正規性条件

$$\sum_{t=1}^{T_0} \sigma_{0t} \lambda_{0t} = \sigma(=\pm 1) \tag{5}$$

直交性条件

$$\sum_{m=0}^{M} \sum_{t=1}^{T_m} \sigma_{mt} a_{mtn} \lambda_{mt} = 0 \ ; \ n=1,\cdots,N \tag{6}$$

ここで，

$$\lambda_{mt} \geq 0 \ ; \ m=0,1,\cdots,M \ , \ t=1,\cdots,T_m \tag{7}$$

の条件のもとで，双対関数

$$Z(\boldsymbol{\lambda}) \equiv \sigma\left\{ \prod_{m=0}^{M} \prod_{t=1}^{T_m} \left(\frac{C_{mt}\lambda_{m0}}{\lambda_{mt}}\right)^{\sigma_{mt}\lambda_{mt}} \right\}^{\sigma} \tag{8}$$

を最大にする $\boldsymbol{\lambda}$ の決定。ここで，

$$\lambda_{m0} \equiv \sigma_m \sum_{t=1}^{T_m} \sigma_{mt} \lambda_{mt} \geq 0 \ ; \ m=1,\cdots,M \tag{9}$$

$$\lambda_{00} \equiv 1 \tag{10}$$

$$\lim_{\lambda_{mt}\to 0} \left(\frac{C_{mt}\lambda_{m0}}{\lambda_{mt}}\right)^{\sigma_{mt}\lambda_{mt}} = 1 \tag{11}$$

以上において，$T=\sum_{m=0}^{M} T_m$ とすると，$T=N+1$ の場合は，式(5)，(6)の線形方程式を解くことにより，最適問題の解を容易に得ることができる。しかし，$T>N+1$ の場合は，線形方程式を解くことはできない。この$(T-N-1)$は，難易度といわれ，難易度が1より大きい場合は，式(5)，(6)，(7)を制約条件とし，式(8)を最大にする λ_{mt} の決定という問題に帰着する。

3. 繰り返し幾何計画法 上述のように，幾何計画法は難易度が非常に大きい場合は有効とはならず，また，多項式以外の数式を内部に含む場合は無力となる。このような場合には，以下に説明する繰り返し幾何計画法(文献1)では，近似手法となっているが，考え方がSLPと同じであるので，ここではこのようにする。)がある。

$h_m(x)$を一般的な関数とする．$\log h_m$を $y_j = \log(x_j/x_j^{(1)})$に関してテイラー展開し，二次以降の項を無視すると，

$$h_m(\mathbf{x}) \cong h_m(\mathbf{x}^{(1)}) \prod_j \left(\frac{x_j}{x_j^{(1)}}\right)^{a_j} \tag{12}$$

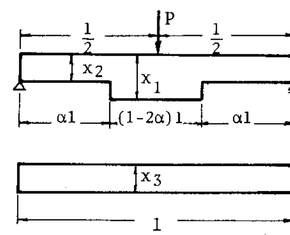
ここで，

$$a_j = \left(\frac{x_j}{h_m}\frac{\partial h_m}{\partial x_j}\right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(1)}} \quad ; \ j=1,\cdots,N \tag{13}$$

このように，$h_m(x)$を式(12)で近似することにより，T_m個あった項数が1となり，難易度を大幅に減少させることが可能となる。

式(12)を繰り返し適用し，解へ収束させる考え方はSLPと同じである。

4. 計算例　右図に示す変断面単純桁の例[7]である。制約条件は，



$$\begin{aligned} h_1(\mathbf{x}) &= 1.5(Pl/\sigma_a)x_1^{-2}x_3^{-1} \leqq 1 \\ h_2(\mathbf{x}) &= 3\alpha(Pl/\sigma_a)x_2^{-2}x_3^{-1} \leqq 1 \\ h_3(\mathbf{x}) &= 10x_2^{-1} \leqq 1 \\ h_4(\mathbf{x}) &= 0.5x_2x_3^{-1} \leqq 1 \end{aligned} \tag{14}$$

目的関数は，

$$h_0(\mathbf{x}) = \{(1-2\alpha)x_1x_3 + 2\alpha x_2x_3\}l \tag{15}$$

適当に変数を変換し，幾何計画法(難易度2)を応用すると，最適解は次のようになる。

i) $0.006\alpha Pl/\sigma_a \leqq 1$;

$$x_1 = \sqrt{0.3Pl/\sigma_a}\ , \quad x_2 = 10\ , \quad x_3 = 5 \tag{16}$$

$$h_{0,\min} = 25\sqrt{21}\{2(\sqrt{2}-\sqrt{0.006Pl/\sigma_a})\alpha+\sqrt{0.006Pl/\sigma_a}\} \tag{17}$$

ii) $0.006\alpha Pl/\sigma_a \geqq 1$;

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{0.3Pl/\sigma_a}(0.006\alpha Pl/\sigma_a)^{-\frac{1}{6}} \\ x_2 &= 10(0.006\alpha Pl/\sigma_a)^{\frac{1}{3}}\ , \quad x_3 = 5(0.006\alpha Pl/\sigma_a)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$h_{0,\min} = 25\sqrt{21}(0.006Pl/\sigma_a)^{\frac{2}{3}}\alpha^{\frac{1}{6}}(2\sqrt{2}\alpha\sqrt{\alpha}-2\alpha+1) \tag{19}$$

詳細は，紙面の都合で省略する。

5. あとがき　幾何計画法は，従来，多項式，非負の係数を許さない等の制限から来る応用範囲の狭さ，困難度が大きくなった場合，他の非線形計画法を用いねばならず，必ずしも有効とはならない，関数の凸性が満足されない場合，不適当な解へ収束することがある，等の欠点があったが，最適値問題を線形方程式系へ置換できることは，他の非線形計画法にない長所であり，問題によっては非常に有力な手法である。

また，繰り返し幾何計画法をさらに研究することにより，前記の欠点も解決し得ると思われる。

6. 参考文献

1) Duffin, Peterson, Zener ; Geometric Programming, John Wiley & Sons, 1967.

2) C.S.Beightler, Ta-Chen Lo, H.G.Rylander ; Optimal Design by Geometric Programming, Transactions of the ASME, 1970, 2.

3) A.G.Walvekar, K.C.Mehta, C.E.Teske ; Optimal Design of Indeterminate Truss Using Geometric Programming, Journal of the Aeronautical Society of India, 1972, 5.

4) A,B,Templeman ; Optimum Truss Design Using Approximating Functions, Optimization In Structural Design, Springer-Verlag, 1975.

5) マクミラン，前田巧雄他訳 ; 数理計画入門 2，東京図書，1972.

6) 彦坂良次 ; 最適設計の基礎について，土木学会西部支部昭和46年度夏期講習会テキスト.

7) 長尚 ; 構造物の最適設計 (p82)，朝倉書店，1971.