

長崎大学工学部 学生員 - 山辺輝久

長崎大学工学部 正 員 高橋和雄

土木設計事務所 正 員 河原清勝

1. 結言 薄肉弾性はり, 薄板および薄肉シェルなどの軽構造に動的な外力が作用すると容易に大振幅振動を生じ, その運動方程式は連立の非線形偏微分方程式に支配される。従来, これらの弾性体の非線形振動を1自由度系と仮定する解法が行われてきたが, 非線形項が大きくなると有効性を失ったり, 実情に合わない厳しい仮定となる場合がある¹⁾。最近, 弾性体を多自由度系に仮定のうえ, 調和バランス法を用いてかなり大きな非線形の領域まで取り扱う解法が採用されつつある²⁾。本論では弾性体すなわち連続体を多自由度系に置換する場合の近似の度合と調和バランス法の収束状況の検討および振幅の無限小安定性を確かめるための第1変分方程式としてえられる高調波を含む連立のMathieuの方程式の簡潔かつ数値解析の容易な手法を提案したものである。

$$2. 基礎式 (1) はりの場合 \quad P = -\frac{EA}{L} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dx \quad (1) \quad L(y, P) = EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c \frac{\partial y}{\partial t} - P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - P \cos \omega t = 0 \quad (2)$$

ここに, y : はりのたわみ, E : ヤング率, I : 断面2次モーメント, A : 断面積, ρ : スパン, P : はりの密度, c : 粘性抵抗係数, t : 時間, P : 外力の荷重強度, ω : 外力の円振動数, x : スパン方向の座標

$$(2) 軸対称円板の場合 \quad \nabla^2 F = -\frac{F}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \quad (3) \quad L(w, F) = D \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{F}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - P \cos \omega t = 0 \quad (4)$$

ここに, w : 板のたわみ, F : Airyの応力関数, $D = E h^3 / (12(1-\nu^2))$: 板剛度, ν : ポアソン比, h : 板厚, r : 座標

3. 多自由度系解析法 上述の運動方程式の解を次のように仮定する。

$$y = r \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) \quad (\text{はりの場合}), \quad w = r \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) T_n(t) \quad (\text{円板の場合}) \quad (5) \quad \text{ここに, } r: \text{回転半径}$$

式(5)の座標関数 $X_n(x)$, $R_n(r)$ として線形曲げ振動の規準関数を用い, 円板の場合には応力関数に決定のうえ, 釣合式(2)および(4)にGalerkin法を適用することにする。 $\int_0^L (L(y, P)) X_n dx = 0$ (はりの場合), $\int_0^R (L(w, F)) R_n r dr = 0$ (円板の場合) (6)

振動の規準関数に関する直交性および減衰に関する直交性の仮定を用いれば, 次の時間に関する連立非線形常微分方程式がえられる。 $\ddot{T}_n + 2\beta_n \dot{T}_n + \alpha_n^2 T_n + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{nmk}^2 T_k T_m = \beta_n P \cos \omega t$ (7) ここに, $\bar{\omega} = \omega/\omega_n$, $\tau = \omega_n t$

β_n : 減衰定数, α_n, β_{nmk}^2 : 線形, 非線形バネ定数

式(7)の周期解を次のようにFourier級数に仮定する。 $T_n = \sum_{l=1}^{\infty} (a_{nl}^1 \cos l\bar{\omega}\tau + b_{nl}^1 \sin l\bar{\omega}\tau)$ (8) ここに, a_{nl}^1, b_{nl}^1 : 未定定数
式(8)を式(7)に代入して非線形項に含まれる正弦, 余弦の積を加法定理を用いて展開のうえ, 調和バランス法を適用すれば, 未定定数 a_{nl}^1, b_{nl}^1 を決定するための連立代数方程式が求められる。任意の振動数 $\bar{\omega}$ に対して適当な初期値のもとに, Newton-Raphson 法の繰返し計算を用いて, a_{nl}^1 および b_{nl}^1 を決定することができる。

4. 振幅安定判別法 周期解 T_n にわずかなかく乱 $\delta_n(t)$ を与えたときの第一変分方程式は次式となる。

$$E\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} + A\delta + \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \cos 2k\bar{\omega}\tau + C_k \sin 2k\bar{\omega}\tau) \delta = 0 \quad (9)$$

ここに, E : 単位行列, H : 減衰行列, A : 剛性行列, B, C : 非線形バネ定数と振幅の2次の積せらなる行列
上式は高調波を含む連立のMathieuの方程式である。以下の解析に先立って, 減衰行列は行列の積の交換則が成立する単位行列に変換できる $H = H^T$ なる場合を取り扱うことにする。いま $\delta = e^{-H\tau} \bar{\delta}$ とおけば, 次のような第一階の微係数を全く標準形に変換することができる。 $E\dot{\bar{\delta}} + \{A - H^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \cos 2k\bar{\omega}\tau + C_k \sin 2k\bar{\omega}\tau)\} \bar{\delta} = 0$ (10)

式(10)の解を微分方程式の解の周期性を保証するFourier級数と収束, 発散を表現する未定定数を含む指数関数の積の形に仮定する。 $\bar{\delta} = \frac{1}{2} b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k \sin 2k\bar{\omega}\tau + b_{-k} \cos 2k\bar{\omega}\tau) e^{\lambda\tau}$ (11) ここに, b_0, b_k, b_{-k} : 時間に無関係な H 上式を式(10)に代入して再び調和バランス法を適用すれば, 次のような未定定数 b_0, b_k および b_{-k} を求めるための同次方程式が求められる。 $G X = 0$ (12) ここに, G : 係数行列, X : b_0, b_k, b_{-k} よりなる列ベクトル

上式の X が0ベクトル以外の解を持つためには, 係数行列 G の値がゼロでなければならない。 $\det(G) = 0$ (13)
式(13)は行列 G の性質から次のような2次の入行列に分解することができる。

$$\det(G) = \det(M_0 - \lambda M_1 - X M_2) = 0 \quad (14) \quad \text{ここに, } M_0, M_1, M_2: \lambda \text{ の } 0 \text{ 次, } 1 \text{ 次および } 2 \text{ 次の係数行列}$$

工式を満足する入を求めるには2倍サイズの行列の固有値問題に変換する手法に従えば、QR法を用いてすべての固有値が求められる。えられた固有値の実数部から減衰行列を引いた値がすべてゼロもしくは負ならば安定、1つでも正ならば不安定というLiapunovの漸近安定の概念によって振幅の安定判別を直接行なうことができる。

5. 数値結果 両端固定ばりを対象に振幅比 $A = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|}{\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|} = 8$ の場合の自由振動の解の収束状況を横軸に調和バランス法の項数 n 、縦軸に振動数比 $\bar{\omega}$ を取り、自由度の数 m をパラメーターに描いた結果を示す。図よりFourier級数の項数 n については3項程度で収束することがわかるが、自由度の数 m はFourier級数の項数より多く採用する必要があるといえる。表-1(a)はこうにしてえられた振動数比 $\bar{\omega}$ と振幅比 A との関係をもとめたものである。(b)は1自由度のばりの規準関数を用いた結果を示すものである。(c)は同じく1自由度系のばりの座屈波形を用いた結果を示す。(d)は

A	(a)	(b)	(c)	(d)
1	1.0222	1.0222	1.0423	1.022
2	1.0854	1.0857	1.1096	1.085
3	1.1824	1.1831	1.2126	1.182
4	1.3049	1.3064	1.3425	1.305
5	1.4468	1.4488	1.4922	1.447
6	1.6046	1.6051	1.6522	1.599
7	1.7771	1.7717	1.8307	1.774
8	1.9672	1.9459	2.0131	

表-1 両端固定ばりの振動数比

一定の軸力を受けるばりの規準関数を用いて、与えられた初期条件のもとに周期振動が可能であるかを差分法による数値実験を行なうことによって求めたものである。(b)のばりの規準関数を用いた1自由度系の解と(a)の多自由度系の解との差は小さいが、振幅の変化とともに振動波形が変動するので両者は必ずしも合致するものではない。(d)の差分法による結果は本法と振動数比および波形とも合致している。他のばりおよび板についても収束は良好で、モード間の連成が少ないところでは3自由度3項程度で十分である。

両端ヒンジばりを1自由度2項近似まで採用した強制振動の応答曲線を算定したのが図-2である。図において横軸は振動数比 $\bar{\omega}$ を、縦軸は振幅の絶対値 A を示した。図中の実線は外力の同位相の振幅に、点線は外力と逆位相の振幅に対応するものである。

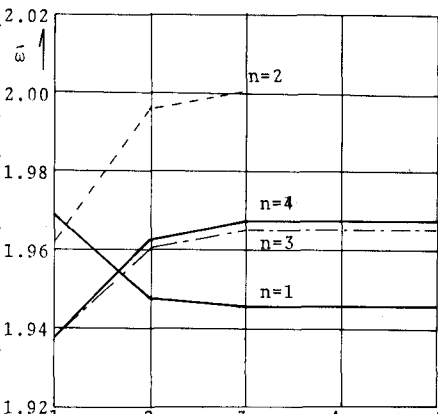


図-1 調和バランス法の収束状況

に、点線は外力と逆位相の振幅に対応するものである。応答曲線に0印を付した振幅は安定、×印を付した振幅は不安定となることを示したものである。 $\bar{\omega}=1.0$ 付近に生ずる共振は主共振を示し、 $\bar{\omega}=0.34$ 付近に連続的に生ずる共振は3倍の高調波共振を示すものである。主共振の逆位相の振幅が鉛直接線をもつ点で($P=70$ で $\bar{\omega}=1.42$ 、 $P=30$ で $\bar{\omega}=1.28$)で負の振幅は安定から不安定に移ることがわかる。応答曲線図において、鉛直接線の軌跡と自由振動の骨格曲線に囲まれる領域はMathieu方程式の第1不安定領域に対応するものである。 $\bar{\omega}=0.34$ 付近の高調波共振においても同位相の振幅が鉛直接線をもつ点で安定から不安定となることとわかる。 $\bar{\omega}=0.6$ 付近で基本波の振幅が不安定となるのはMathieuの方程式の第2不安定領域に対応するものである。 $\bar{\omega}=3.0$ 付近に分岐的に生ずる3分の1の分数調波共振は逆位相の振幅が不安定で、同位相の振幅が安定であることがわかる。減衰のある場合々々自由度系としての結果については講演時に発表する。

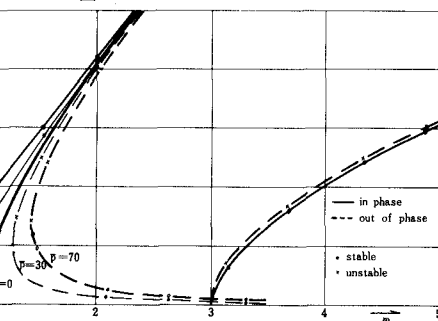


図-2 両端ヒンジばりの間波数一応答曲線 ($h=0$)

参考文献 1) Y. K. Lin: Probabilistic Theory of Structural Dynamics, McGraw-Hill, Inc., 1967 2) 高橋・樗木: 多自由度系解析法によるばりの非線形振動, 第29回土木学会年次学術講演会講演要録集, 第1部, 昭和49年10月