I-306 減衰マトリックスの対角化条件に関する研究

京都大学大学院 学生員 山本秀隆
京都大学工学部 正員 山田善一
同上 正員 河野健二

1. まえがき

構造物の動的解析において、減衰は重要な要素として考えられ、その簡明な表わし方が必要となっている。一般には、粘性減衰と考えて線形な運動方程式によって、応答が計算される。非減衰時のモーダルマトリックスによって質量および剛性マトリックスを対角化させると同時に、減衰マトリックスも対角化されるならば、モーダルアナリシスが可能となる。一般には、減衰マトリックスは質量マトリックスや剛性マトリックスに比例した形で扱われ、これらの形の減衰マトリックスは、非減衰時のモーダルマトリックスによって対角化される。また、各次振動モードでの減衰定数が一定になるような形も考えられる。これらは、T.K.Caughey によって示された減衰マトリックスを対角化するための十分条件から得られる。また、R.W.Clough により示された比例形の減衰マトリックスは、質量比例形、剛性比例形を含んでいるが、各次振動モードの減衰定数が一定となる形を含んでいない。そこで、ここではこれらの減衰マトリックスを有する一般的な減衰マトリックスを求め、それが比例形としての条件を満足することを示し、多自由度系への適用を試みた。

2. 対角化条件とその数値計算

減衰自由振動の運動方程式は非減衰時のモーダルマトリックス$[\Phi]$を用いると次のように表わされる。

$$(1)\quad [I]\{\ddot{q}\}+[\tilde{C}]\{\dot{q}\}+[\omega^2]\{q\}=\{0\}$$

ここに、$\{x\}=[\Phi]\{q\}$, $[\Phi]^T[C][\Phi]=[\tilde{C}]$

$[\Phi]^T[M][\Phi]=[I]$, $[\Phi]^T[K][\Phi]=[\omega^2]$

T.K.Caughey によると減衰マトリックスの対角化の条件は次式で示される。

$$(2)\quad [A]=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{N-1} a_{jn}[B]^{j/n}$$

ここに、$[A]=[\Phi]^T[C][\Phi]$, $[B]=[\Phi]^T[K][\Phi]$

(2)式で $n=1$ とおくと R.W.Clough の示した次式を得る。

$$(3)\quad [C]=[M]\sum_{j=0}^{N-1} a_j\left([M]^{-1}[K]\right)^j$$

または、

$$(4)\quad [C]=[M][\Phi]\sum_{j=0}^{N-1} a_j[\omega^2]^j[\Phi]^T[M]$$

ここで、係数a_jは次式より決定される。

$$(5)\quad \beta_i=\frac{1}{2}\left(\frac{a_0}{\omega_i}+a_1\omega_i+a_2\omega_i^3+\cdots+a_{N-1}\omega_i^{2N-3}\right)\quad (i=1,2,\cdots,N)$$

表-1

COMPARISON OF DAMPING MATRICES

(a) mass proportinal [CASE 1&2]

ω	β_i	ζ_i $j=0$	$j=1$	$j=2$	Σ
14.52	0.02	0.02	0	0	0.02
31.04	0.0093	0.0093	0	0	0.0093
46.09	0.0063	0.0063	0	0	0.0063

(b) stiffness proportinal [CASE 1&2]

ω	β_i	ζ_i $j=0$	$j=1$	$j=2$	Σ
14.52	0.02	0	0.02	0	0.02
31.04	0.042	0	0.042	0	0.042
46.09	0.063	0	0.063	0	0.063

(c) constant [CASE 1]

ω	β_i	ζ_i $j=0$	$j=1$	$j=2$	Σ
14.52	0.02	0.0123	0.0079	-0.0002	0.0200
31.04	0.02	0.0057	0.0170	-0.0020	0.0207
46.09	0.02	0.0038	0.0253	-0.0054	0.0237

(c) constant [CASE 2]

ω	β_i	ζ_i $j=0$	$j=1$	$j=2$	Σ
14.52	0.02	0.0123	0.0079	-0.0002	0.02
31.04	0.02	0.0057	0.0170	-0.0028	0.02
46.09	0.02	0.0038	0.0253	-0.0091	0.02

[CASE 1] --- $[C]=[M]\sum_{j=0}^{N-1} a_j([M]^{-1}[K])^j$

[CASE 2] --- $[C]=[M][\Phi]\sum_{j=0}^{N-1} a_j[\omega^2]^j[\Phi]^T[M]$

β_iを適当に仮定して、(5)式によってa_jを決定し(3)または(4)式で$[C]$を求め、$[\Phi]^T[C][\Phi]$を計算して得られる減衰定数ζ_iをβ_iと比較して比例条件の評価をすると表-1のようになる。β_iとして質量比例形を与えるならば、$j=0$で得るζ_iにβ_iは一致し、剛性比例形を与えるならば、$j=1$で得るζ_iに一致している。一方、$\beta_i=const.$で与えるなら

ば、$j=0,1,2$のどの式にもconst.な形は得られないが、各項の和をとればβ_iに一致する。(3)式で得る減衰マトリックスは非対称となるから、$[M]^{-1}[K]$を$[M]^{-1/2}[K][M]^{-1/2}$と考えて計算すれば対称性は失なわれない。(2)式で$n=1$とおいた(3)および(4)式は、質量比例形、剛性比例形の減衰マトリックスを含んでいるが、$\beta_i=$const.な減衰マトリックスを陽な形で含んでいない。

T.K.Caugheyの示す(2)式で$n=2$とおくと次式が得られる。

$$(6)\qquad [C]=[M]^{1/2}\sum_{j=0}^{N-1}a_j\left([M]^{-1/2}[K][M]^{-1/2}\right)^{j/2}[M]^{1/2}$$

ここで、係数a_jは次式より得られる。

$$(7)\qquad \beta_i=\frac{1}{2}\left(\frac{a_0}{\omega_i}+a_1+a_2\omega_i+a_3\omega_i^2+\cdots+a_{N-1}\omega_i^{N-2}\right)$$

$$(i=1,2,\cdots,N)$$

(6)式についての数値計算を行うと表－2のようになる。$j=0$では質量比例形、$j=1$では$\beta_i=$const.な形、$j=2$では剛性比例形の減衰マトリックスが表われている。したがって、(6)式はここに示した3つの基本的な減衰マトリックスを陽な形で表わしており、(3)式よりも一般的な減衰の形を与えるものと思われる。

(7)式の連立方程式において自由度が増加すれば、解a_jの安定性が悪くなる。図－1では自由度Nを増加させたときの解a_jの値を示すが、N=9ぐらいより不安定となっている。従って、(3)または(4)式では$\beta_i=$const.を与えると減衰マトリックスは和をとる必要があるがa_jの精度が悪いため正確な形が得られない。ところが(6)式では、$j=1$において$\beta_i=$const.な形が表われて和をとる必要がないためよりよい減衰マトリックスが得られる。

表－2

COMPARISON OF DAMPING MATRICES (N = 8)

(a) mass proportinal (j=0)

ω	β_i	ζ_i		
		j=0	j=1∿7	Σ
2.015	0.02	0.0200	0	0.0200
8.343	0.0048	0.0048	0	0.0048
20.64	0.0019	0.0019	0	0.0019
39.57	0.0010	0.0010	0	0.0010
76.34	0.0005	0.0005	0	0.0005

(b) stiffness proportinal (j=2)

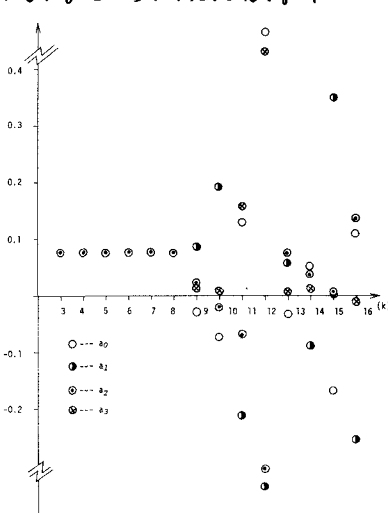
ω	β_i	ζ_i		
		j=2	j=0,1&3∿7	Σ
2.015	0.02	0.0200	0	0.0200
8.343	0.0828	0.0828	0	0.0828
20.64	0.2048	0.2048	0	0.2048
39.57	0.3928	0.3928	0	0.3928
76.34	0.7577	0.7577	0	0.7577

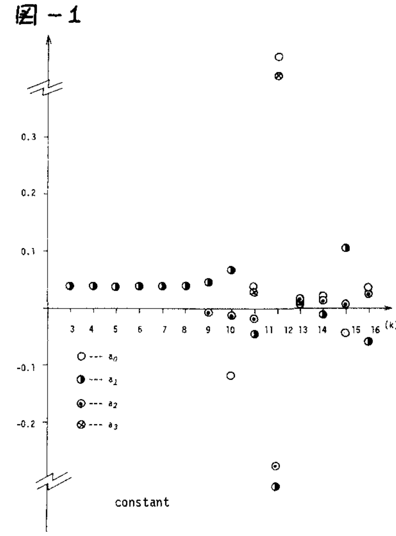
(c) constant (j=1)

ω	β_i	ζ_i		
		j=1	j=0&2∿7	Σ
2.015	0.02	0.02	0	0.02
8.343	0.02	0.02	0	0.02
20.64	0.02	0.02	0	0.02
39.57	0.02	0.02	0	0.02
76.34	0.02	0.02	0	0.02

$$[C]=[M]^{1/2}\sum_{j=0}^{N-1}a_{j2}([M]^{-1/2}[K][M]^{-1/2})^{j/2}[M]^{1/2}$$

図－1





3. あとがき

T.K.Caugheyによって示された対角化条件は多くの形を含んでいるが、一般に比例形の減衰マトリックスは(6)式で表わされる。そしてこの式を用いる方が数値計算の上でも有利と思われる。

（参考文献） T.K.Caughey and M.E.J.O'kelly, "Classical Normal Mode in Damped Linear Dynamic Systems," Jour. of Applied Mechanics, June, 1960