

北海道開発局 正員 品川 亨
北海道大学工学部 正員 能町 純雄
北海道大学工学部 正員 角田 与史雄

1. まえがき. 有限要素法の応用拡大にはめざましいものがあり、静的問題はもとより動的問題や流体力学分野まで数多くの研究成果がある。時間を連続変数とし Flexibility を Discrete とする動的 방법이波動をどの程度有効に表わすことができるかを検討するため、本論文では、はり为例にとって議論を進める。はり要素の変位を3次放物線とする Flexibility と Consistent Mass を考え、節点間の振動方程式を立て、これを和文変換によって解析した結果と微分方程式による解とについて位相速度を求め比較する方法をとった。

2. 解析理論. はりの波動問題はティモシェンコはりによるのが普通であるが、はりの初算理論によっても波動解は求められる。解析解と Discrete 解との比較を明確にするため初算解によることとする。

a. 微分方程式による解. 一様断面のはりを考えてせん断変形・回転慣性を無視すると、はりの振動方程式は、

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

V をせん断波速度に対する比速度、 λ を波長、 r_p を断面2次半径、 $V_p = \sqrt{E/G}$ とすれば、(1)式の位相速度は、

$$V_r = \frac{2\pi}{\lambda} r_p V_p \quad (2)$$

b. 要素法的手法による解. 式(1)に対してたわみ関数 w を要素について3次放物線と仮定して次の様に書く。

$$w = [w^{(i)} \theta^{(i)} w^{(j)} \theta^{(j)}] [w_i \theta_i w_j \theta_j]^T \quad (3)$$

$$w^{(i)} = 1 - 3\eta^2 + \eta^3, \theta^{(i)} = b(\eta - 2\eta^2 + \eta^3), w^{(j)} = 3\eta^2 - 2\eta^3, \theta^{(j)} = b(-\eta^2 + \eta^3), \eta = \frac{x}{b} \quad (4)$$

式(1)に(3)・(4)を乗じて要素について部分積分を施し、境界条件に留意して整理すると、境界節点力を境界節点変位で表わすことができる。

Discrete な点 $X-1, X, X+1$ を用いて X 点における力のつりあいをとると、

$$Q; \frac{6EI}{b^2} \Delta \theta_x - \frac{12EI}{b^3} \Delta^2 w_{x-1} - \rho A b^3 \frac{13}{420} \Delta \ddot{\theta}_x + \rho A b (\ddot{w}_x + \frac{9}{70} \Delta^2 \ddot{w}_{x-1}) = 0 \quad (5)$$

$$M; \frac{2EI}{b} (6\theta_x + \Delta^2 \theta_{x-1}) - \frac{6EI}{b^2} \Delta w_x + \rho A b^3 (\frac{1}{210} \ddot{\theta}_x - \frac{1}{140} \Delta^2 \ddot{\theta}_{x-1}) + \rho A b^2 \frac{13}{420} \Delta \ddot{w}_x = 0$$

いま θ_x, w_x を $\theta_x = \Theta \cos \frac{2\pi}{\lambda} (bx - ct), w_x = W \sin \frac{2\pi}{\lambda} (bx - ct)$ と仮定し、上式に代入して整理すると次の様な位相速度を求める固有方程式が求められる。

$$\frac{1}{420} (2 + \frac{476}{420} D_i^* + \frac{60}{420} D_i^{*2}) \beta^2 - 12 (1 - \frac{1}{6} D_i^* - \frac{1}{420} D_i^{*2}) \beta + 12 D_i^{*2} = 0 \quad (6)$$

$$\text{但し、} \sqrt{\beta} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{b^2}{r_p V_p} V_s, D_i^* = 2(1 - \cos \frac{2\pi}{\lambda} b), b; \text{節点間隔}$$

以上より、両結果の比をとれば、 $V_c = V_s / V_r = (\frac{\lambda}{2\pi b})^2 \sqrt{\beta}$ となる。

3. まとめ 右表に波長と V_c との関係を示した。Discrete Model の場合、 $\lambda < 3b$ の波動は存在せず、またみかけ上ティモシェンコばりの様に2つの位相速度が生ずることがわかるが、ティモシェンコはりとは全く無関係のものである。以上より通常のはりの固有周期を求める様な場合には、数分割で十分の精度が得られるが、波動として応答問題を考える場合、本方法による時、高周波に制限があり、十分な精度を得ることは非常に困難であろう。

λ	$\frac{V_c}{V_p}$
3b	4.643623 1.011821
4b	11.159732 1.003944 20.706905
5b	1.001654 33.234863
6b	1.000811 48.653498
7b	1.000403 66.875298
8b	1.000314 86.690803
9b	1.000308 111.483443
10b	1.000197 137.776237
11b	1.000073 166.693655
12b	1.000051 198.222117
13b	1.000037 232.338068
14b	1.000029 269.094252
15b	1.000021