

京都大学大学院 学生員 中島 信
 京都大学工学部 正 員 丹羽義次
 京都大学工学部 正 員 小杯昭一

1. はじめに

過渡現象等の解析に対するラプラス変換の有用性は広く認められるところであるが、原空間での解を得るための逆変換の過程を数値的に実行することは一般に困難であることが多い。しかしながら、過渡応答の様子と比較的単純な熱伝導問題等に対する数値ラプラス逆変換の応用は十分な精度が得られることがわかった。本研究ではこの熱伝導問題にラプラス変換をほどこしたものを積分方程式によって解き、これを数値ラプラス逆変換によって解を得た例を示すとともに、他の力学的問題への応用例として、粘弾性地盤におけるトンネル開削に伴う、特に切羽付近の応力変位の過渡的変化状態を積分方程式法を用いて3次元的に解析することとを試みる。

2. 熱伝導問題に対する応用例

《積分方程式への定式化》 2次元空間内の等方均質な物質の領域Dにおける熱伝導の基礎方程式は次のようである。 $\nabla^2 T(P,t) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}(P,t)$ 但し $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $T(P,t)$:時刻tに点Pの温度, ρ :密度, C :比熱, ρC :熱伝導係数
 ここで時間tについてLaplace変換する。一般に、 $f^*(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ 。このとき基礎方程式は、

$$K \nabla^2 T^*(P,s) - s T^*(P,s) + T(P,0) = 0 \quad \text{ここに } K = \rho C \quad (1)$$

以下においては特に初期条件、 $T(P,0)=0$ なる場合を考える。偏微分作用素 $\mathcal{L}$: $\mathcal{L}[T^*] = \nabla^2 T^* - \frac{s}{K} T^*$ を用いれば、

(1)の基本特異解とは、D上の2点x,yについて、 $\mathcal{L}[G(x,y)] = -\delta(x-y)$, δ : Dirac's delta function を満足するもの。本問題では次のような形をとる。 $U^*(P,P',s) = \frac{1}{2\pi K} K_0[(s/K)^{1/2} r]$, K_0 : 0次2種変形Bessel関数 r : 2点P,P'間の距離 (2)

この U^* と、(1)を満足する解 T^* を次に示すいわゆる相反公式、

$$\int_D (U \mathcal{L}[V] - V \mathcal{L}[U]) dV = \int_{\partial D} (U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n}) dS \quad U, V \text{ は } (D+\partial D) \text{ で Class } C^2 \quad (3)$$

に代入すれば結果は下の式(4)のようになり、点Pを ∂D 上にとれば、これは境界上の $T^*(P,s)$ と $\frac{\partial T^*}{\partial n}(Q,s)$ に関する式となり、境界上でどちらかの関数が与えられれば他方に関する積分方程式を構成し、これより内部の $T^*(P,s)$ も得られる。

$$F(P) \cdot T^*(P,s) = K \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial U}{\partial n}(Q,s) U^*(P,Q,s) - T^*(Q,s) \frac{\partial U}{\partial n}(P,Q,s) \right\} dS \quad \text{但し } F(P) = \begin{cases} 1 & (P \in D) \\ \frac{1}{2} & (P \in \partial D) \\ 0 & (P \in (D+\partial D)^c) \end{cases} \quad (4)$$

(4)の数値計算の過程でP,P'が一致しない場合は、Simpson公式を用いるが、一致する場合には式(2)からわかるように特異積分となるため、次に挙げる積分の多項式にFの近似を使えば精度向上をむかふ。

$$\int_0^\infty K_0(xt) dt = -(\gamma + \ln \frac{x}{2}) x \sum_{k=0}^m \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2 (2k+1)} + x \sum_{k=0}^m \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2 (2k+1)^2} + x \sum_{k=0}^m \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2 (2k+1)} (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}) \quad \gamma: \text{Euler's const.} \quad (5)$$

《Laplace逆変換の方法》 上の積分方程式を解く過程を各種のLaplace変換のparameter s について繰り返すことによって、数値Laplace逆変換を行なうに必要なdataがそろわなければならない。本問題で採用した逆変換の手法は、あらかじめ $f(t)$ の関数型をある程度予測し、次のように表わせるものと仮定する。

$$f(t) = A + Bt + \sum_{\alpha=1}^m a_\alpha \exp(-b_\alpha t) \quad A, B, a_\alpha (\alpha=1,2,\dots,m); \text{const.} \quad (6)$$

$$\text{このとき(6)のLaplace変換が、} \quad s f^*(s) = A + \frac{B}{s} + \sum_{\alpha=1}^m \frac{a_\alpha}{1 + b_\alpha/s} \quad (7)$$

となることから $(m+2)$ 種類の s を選んだ場合、それぞれ積分方程式を解いて得られる $f^*(s)$ とから、(7)を連立方程式的に解き、未定係数 A, B, a_α を求め、 $f(t)$ を決定しようとするものである。ただし $(m+2)$ 元の連立一次方程式に簡単化するために、 b_α には適当な値を与える。

《解析結果および考察》 ここでは、図1に示すような領域、境界条件をもつ問題を解析した。変換parameter s の値を0.01から順次2倍ずつ増加させて5242.88まで合計20個選んだ場合の結果の一例を図2の破線を示す。実験はいわゆる理論解領域内の各点で、誤差は最大2~3%というかなり良い精度が得られることがわかった。

変換parameter S の値の選ぶ方は逆変換の精度と大いに関係するが満足すべき解を得るには Laplace 変換の性質から図3のFに $S-(S \times T^*)$ のグラフを描き、曲線が両端共に収束するような値の幅を定めやすことが出来る。この値の幅はかなり大きく、比較的数少ない個数でおさえるためには、2倍ずつ、5倍ずつといったようにして S の値を選ぶのが合理的と考えられるが、精度と経済性の兼ね合いを考慮すれば S の個数は10数個でもよいと考えられる。

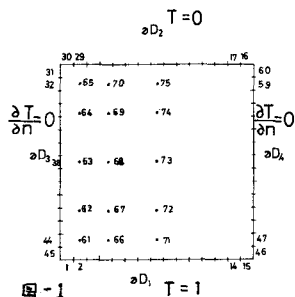


図-1

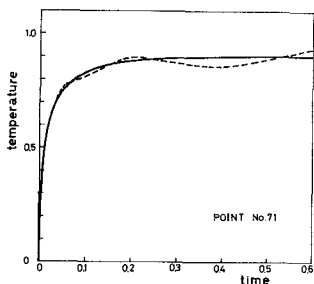


図-2

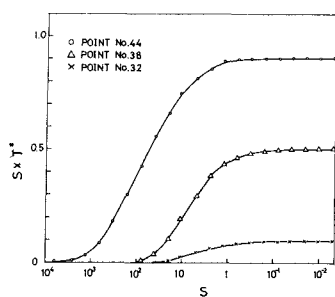


図-3

3. 粘弾性問題に対する応用例

地盤をモデル化して、線形粘弾性体と仮定し、この地盤中にトンネルを開削した場合の特に切羽周辺の応力、変位を中心に3次元の解析を行なう。対応の原理より、基礎方程式を Laplace 変換することによって線形弾性問題と同等の式を得る。これより積分方程式法によって変換域での応力、変位を求め、これを数値 Laplace 逆変換することによって最終的解を得る。以下にその定式化を略述する。

《基礎方程式および境界条件》 地盤は等方均質で、かつ応力-ひずみ関係が線形履歴法則に従うものとする。 (x_1, x_2, x_3) を Euclid 空間内の直交直線座標、 t を時刻とし、 $e_{ij}(x,t)$, $u_i(x,t)$, $\sigma_{ij}(x,t)$, $F_i(x,t)$ をそれぞれ、ひずみ、変位、応力、物体力とする。このとき、ひずみの定義式、運動方程式、応力-ひずみ関係式は、(ρ:密度)

$$e_{ij}(t) = \frac{1}{2} [u_{i,j}(t) + u_{j,i}(t)] \quad (8)$$

$$\sigma_{ij,j}(t) + F_i(t) = \rho \frac{\partial^2 u_i(t)}{\partial t^2}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (9)$$

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij} \int_{-\infty}^t \lambda(t-\tau) \frac{\partial e_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + 2 \int_{-\infty}^t \mu(t-\tau) \frac{\partial e_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (10)$$

ここに $\lambda(t)$, $\mu(t)$ は、弾性論における Lamé 定数に対応する緩和関数で、不足及の原理より $-\infty < t < 0$ で、 $\lambda(t) = \mu(t) = 0$ である。式(8)(9)に代入すれば、場を支配する方程式が変位で表わされる。

$$\int_{-\infty}^t \mu(t-\tau) \frac{\partial u_{i,j,j}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \int_{-\infty}^t [\lambda(t-\tau) + \mu(t-\tau)] \frac{\partial u_{i,j,j}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (11)$$

今、仮に初期条件として自然状態を考えれば、初期条件、境界条件は式(10)(11)となる。(η_j : 境界における単位法線ベクトル)

$$u_i(t) = e_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t) = 0 \quad -\infty < t < 0 \quad (12), \quad T_i(t) = \sigma_{ij}(t) \eta_j = S_i(t) \quad \text{on } Br \quad (13), \quad u_i(t) = q_i(t) \quad \text{on } Bu \quad (14)$$

《基礎方程式の Laplace 変換》 式(12)の初期条件を考慮の上、式(11)(13)(14)を時間 t について Laplace 変換する。

特に、 $\lambda^*(s) = s \mathcal{L}[\lambda(t)]$, $\mu^*(s) = s \mathcal{L}[\mu(t)]$ と定義すれば、場の方程式(11)は、

$$(\mathcal{L}_{ij} - s^2 \delta_{ij}) u_j^*(x,s) \equiv \frac{\mu^*(s)}{\rho} u_{i,j,j}^*(x,s) + \frac{\lambda^*(s) + \mu^*(s)}{\rho} u_{j,j,i}^*(x,s) - s^2 u_i^*(x,s) = -\frac{1}{\rho} F_i^*(x,s) \quad (15)$$

$$\text{問題が準静的な場合は,} \quad \mathcal{L}_{ij} u_j^*(x,s) = -\frac{1}{\rho} F_i^*(x,s) \quad (16)$$

《積分方程式化》 (丹羽, 小林, 福井「トンネル切羽周辺の3次元応力状態」, S.51 関西路開削集) 等を参照したい。

《Laplace 逆変換》 数値計算の経済性を考慮し、関数補間の考え方を導入し、なるべく少ない個数の S によって精度よい解を得ることを試みる。

4. おわりに

以上、Laplace 変換の応用について述べてきたが、元来この手法は、他の差分法等と違って誤差の累積がない等各種の利点をもちているが、問題はこれらの数値逆変換がいかに精度よく行なうかにあると思われる。なお、粘弾性問題については現在計算中であり、結果は当日とりまとめ発表する予定である。