

九州大学工学部 正員 彦坂 熙
 “ “ 正員 吉村 虎蔵
 日本国有鉄道 正員 綿島 弘之

1. 緒言

定常ランダムな路面凹凸をもつ道路橋上を、sprung-mass にモデル化された車面が走行するときの車面-橋梁系の動的応答は、非定常不規則振動の問題となる。橋梁の非定常振動が車面の振動に及ぼす影響を無視し、車面が橋梁に与える接地力は定常であると仮定して応答の2乗平均値を求めることは従来から行われてきたが、この仮定は必ずしも妥当なものと言えない。本論は、フーリエ級数を用いた未定係数法により、本題の非定常振動のより精密な解析を試みたものである。

2. 路面の不規則凹凸

路面周波数を Ω (cycle/m) とし、 $2\pi\Omega = \omega$ とおけば、路面の不規則凹凸 $\Delta(x)$ のパワースペクトル密度 $S_{\Delta}(\omega)$ は、車面の振動に影響を及ぼす周波数領域 ($\Omega_L \leq \Omega \leq \Omega_U$) において、おおむね次式で表わされることが知られている。

$$S_{\Delta}(\omega) = a(\omega/2\pi)^{-2} \quad (1)$$

ここに、 a は路面の粗さを示すパラメーターであり、本論では $a = 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{m}$ とする³⁾。

$\Delta(x)$ は平均値0の定常確率がウス過程と仮定すれば、そのサンプル関数が近似的に次式で表わされる⁴⁾。

$$\Delta(x) = \sum_{k=1}^N (a_k \cos \omega_k x + b_k \sin \omega_k x) \quad (2)$$

ここに、 $\omega_k = 2\pi\Omega_k + (k - \frac{1}{2})\Delta\omega$, $\Delta\omega = 2\pi(\Omega_U - \Omega_L)/N$, a_k, b_k は互いに独立で平均値0、分散 $\sigma_k^2 = S_{\Delta}(\omega_k)\Delta\omega/\pi$ のガウス確率変数。なお、シミュレーション法による応答解析^{5,6)}においては N 個の a_k, b_k の値を求めなければならないが、本法ではその必要はない。

3. 運動方程式

図-1のように、ばね上質量 M_s 、固有円振動数 ω_0 、減衰定数 r_0 の1自由度振動系にモデル化された車面が、一定速度 v で走行するものとし、 M_s の変位を $Z(t)$ とする。また橋梁の動たわみ $Y(t, x)$ は、 n 次の固有モードを $\Phi_n(x)$ 、一般座標を $\bar{\Phi}_n(t)$ とし、次式で表わされる。

$$Y(t, x) = \sum_{n=1}^n \Phi_n(x) \bar{\Phi}_n(t) \quad (3)$$

任意時刻 t における $Z(t)$, $\bar{\Phi}_n(t)$ の平均値を $E[Z(t)] = \mu_z(t)$, $E[\bar{\Phi}_n(t)] = \mu_{\bar{\Phi}_n}(t)$ とすれば、次式が成立する。

$$Z(t) = \mu_z(t) + z(t), \quad \bar{\Phi}_n(t) = \mu_{\bar{\Phi}_n}(t) + \phi_n(t) \quad (4)$$

上式の $\mu_z(t)$, $\mu_{\bar{\Phi}_n}(t)$ は路面が完全に滑らかな場合の車面-橋梁系の動的応答に他ならず、周知の種々の方法で確定的に求められる。また $z(t)$, $\phi_n(t)$ は平均値0の非定常ランダム過程であり、運動方程式が次式で与えられる。

$$\ddot{z} + 2r_0\omega_0(\dot{z} - \dot{y}_v) + \omega_0^2(z - y_v) = 2r_0\omega_0\dot{\Delta}(vt) + \omega_0^2\Delta(vt) \quad (5a)$$

$$\ddot{\phi}_n + 2r_n\omega_n\dot{\phi}_n + \omega_n^2\phi_n = -\frac{P_0}{M_n g} \Phi_n(vt) \ddot{z} \quad (5b)$$

ただし、 ω_n, r_n, M_n は橋梁の n 次の固有円振動数、減衰定数、換算質量、 $y_v, \Delta(vt)$ は $x=vt$ における橋梁のたわみおよび路面の凹凸、また P_0 は車面の重量。なお、初期条件は、 $Z(0), \dot{Z}(0), \bar{\Phi}_n(0), \dot{\bar{\Phi}}_n(0)$ が確定的に与えられるものとする。 $Z(0) = \dot{Z}(0) = 0$, $\phi_n(0) = \dot{\phi}_n(0) = 0$ となる。

4. フーリエ級数による非定常2乗平均値の算定

車面が橋梁を通過するに要する時間 $t_0 = l/v$ を用いて、次の正弦フーリエ級数展開を行う。

$$2r_0\omega_0\dot{z} + \omega_0^2 z = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \alpha_m t \quad (6)$$

$$2r_n\omega_n\dot{\phi}_n + \omega_n^2 \phi_n = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \alpha_m t \quad (7)$$

ここに、 $\alpha_m = m\pi/t_0$, A_m は未定係数、 B_m は式(2)を用いて確率変数 a_k, b_k により表わされる。

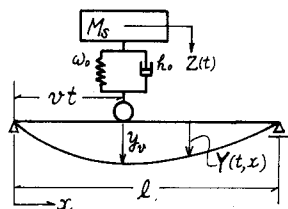


図-1

式(6), (7)を(5a)に代入して Σ を求めれば,

$$\Sigma = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m + B_m) \lambda_m(t) \quad (8) \quad t=t_0 \text{ 且 } \lambda_m(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t e^{-k_0 \omega_0 (t-\tau)} \sin \omega_0' (t-\tau) \sin \alpha_m \tau d\tau$$

上式の Σ を2回微分して式(5b)に代入し、 ϕ_n を求めれば,

$$\phi_n = -\frac{P_0}{M_n g} \sum_{m=1}^{\infty} (A_m + B_m) \omega_{nm}(t) \quad (9) \quad t=t_0 \text{ 且 } \omega_{nm}(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t e^{-k_n \omega_n (t-\tau)} \sin \omega_n' (t-\tau) \lambda_m(\tau) d\tau$$

したがって、橋梁のたわみ応答は次式で表わされる。

$$y(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x) \phi_n(t) = -\sum_{m=1}^{\infty} (A_m + B_m) \gamma_m(t, x) \quad (10) \quad t=t_0 \text{ 且 } \gamma_m(t, x) = \frac{P_0}{g} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x) M_n^{-1} \omega_{nm}(t)$$

式(10)を(6)に代入すれば、右辺のフーリエ級数の各係数の係数 A_k が次のように求められる。

$$A_k = \frac{2}{t_0} \int_0^{t_0} (2k_0 \omega_0 \dot{y}_0 + \omega_0^2 y_0) \sin \alpha_k t dt = -\sum_{m=1}^{\infty} C_{km} (A_m + B_m) \quad (11)$$

$$\text{ここに、} C_{km} = \frac{2}{t_0} \int_0^{t_0} (\omega_0^2 \sin \alpha_k t - 2k_0 \omega_0 \alpha_k \cos \alpha_k t) \gamma_m(t, \nu t) dt, \quad \alpha_k = k\pi/t_0$$

式(11)より、未定係数 A_m に関する次の連立1次方程式がえられる。

$$[C_{km} + \delta_{km}] \{A_m\} = -[C_{km}] \{B_m\}, \quad t=t_0 \text{ 且 } \delta_{km} \text{ は Kronecker のデルタ記号} \quad (12)$$

$$\text{上式を解いて、} \{A_m\} = -[C_{km} + \delta_{km}]^{-1} [C_{km}] \{B_m\} \quad \text{または} \quad \{A_m + B_m\} = [D_{km}] \{B_m\} \quad (13)$$

$$t=t_0 \text{ 且 } [D_{km}] = \mathbf{I} - [C_{km} + \delta_{km}]^{-1} [C_{km}]$$

$y(t, x)$ の2乗平均値すなわち $Y(t, x)$ の分散を $\sigma_Y^2(t, x)$ とおけば、式(10), (13)より

$$\sigma_Y^2(t, x) = E[Y^2(t, x)] = \mathbf{I}^T E[\{A_m + B_m\} \{A_m + B_m\}^T] \mathbf{I}^T = \mathbf{I}^T [D_{km}] E[\{B_m\} \{B_m\}^T] [D_{km}]^T \mathbf{I}^T \quad (14)$$

ただし $\mathbf{I}^T$ は $\gamma_m(t, x)$ の行ベクトル。

同様に $\dot{y}(t, x)$ の2乗平均値は、

$$\sigma_{\dot{Y}}^2(t, x) = \dot{\mathbf{I}}^T [D_{km}] E[\{B_m\} \{B_m\}^T] [D_{km}]^T \dot{\mathbf{I}} \quad (15)$$

したがって、時刻 t における非定常応答の真の2乗平均値は次式より算定される。

$$\left. \begin{aligned} E[Y^2(t, x)] &= \{E[Y(t, x)]\}^2 + \sigma_Y^2(t, x) \\ E[\dot{Y}^2(t, x)] &= \{E[\dot{Y}(t, x)]\}^2 + \sigma_{\dot{Y}}^2(t, x) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

5. 計算例

スパン50m、総重量136トン(1車線)、1次固有振動数 $f_1 = \omega_1/2\pi = 2.45 \text{ Hz}$ の単純桁橋上を、 $P_0 = 13.6 \text{ トン}$ の車両が走行するときのスパン中央の応答速度 $\dot{y}(t, l/2)$ を、1次固有振動モードのみを用いて解析した。波長1m以下の路面凹凸は無視し、橋梁の減衰定数を $k_n = 0.01$ 、車両のそれを $k_0 = 0.03$ とした。平均値 $E[\dot{y}(t, l/2)]$ 、分散の平方根 $\sigma_{\dot{Y}}$ および2乗平均値 $E[\dot{Y}^2(t, l/2)]$ の平方根の時間的変化の模様と応答のサンプル関数の一例を図-2に示す。図-3は走行速度 v を、図-4は車両と橋梁の1次固有振動数比 ω_1/ω_0 を変えた場合の $\sigma_{\dot{Y}}(t, l/2)$ の時間的変化をプロットしたものである。フーリエ級数は40項までを採った。計算結果の詳細については、講演時に報告する。

[参考文献] 1) L. Fryba; Final Report of 8th IABSE Congress, 1968. 2) 吉村他; 九大工学集報, 48-6, 昭和50年11月。

3) 小堀他; 土木学会論文報告集, No. 248, 1976-4.

4) 屋谷; 確率論手法による振動解析, 鹿島出版会, 1974.

5) 鎌塚他; 土木学会論文報告集, No. 208, 1972-2.

6) 屋谷他; 土木学会論文報告集, No. 246, 1976-2.

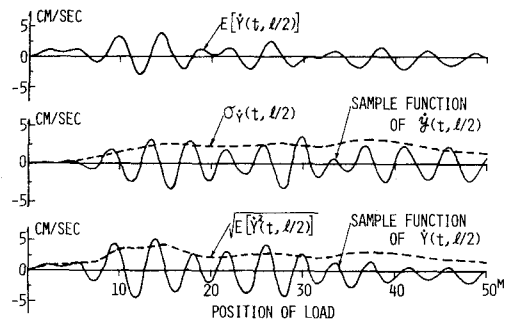


図-2 応答速度 ($v=12 \text{ m/sec}$, $\omega_0/\omega_1=1$)

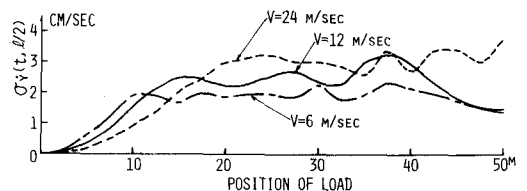


図-3 走行速度の変化の影響 ($\omega_0/\omega_1=1$)

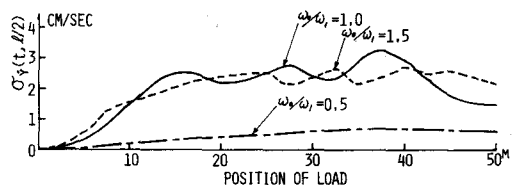


図-4 ω_1/ω_0 の変化の影響 ($v=12 \text{ m/sec}$)