

長崎大学工学部

正員 高橋和雄

久保田建設

正員 中島 敏

1. 緒言 偏平アーチは構造要素としてしばしば使用され、また、自重、支持部の出来具合、製作過程などによって生ずる初期不整による不完全性をもつはりや軸方向圧縮力を受けて座屈したはり初期変形をもつために偏平アーチの一種とみなすことができる。薄肉部材の座屈値が初期変形の大きさにきわめて敏感であることが知られているが、これらの部材の非線形振動問題においても振動特性に及ぼす影響が大きいものと考えられる。図-1に示すように両端ヒンジのsin状の偏平なアーチに対称な横荷重が作用するとアーチのライズ Δ の大きさが回転半径の2倍(2r)程度までは変形は荷重とともに増大するのみであるが、 Δ が2r以上になると釣合荷重に極値が存在し、脆い移り座屈が可能となる。これに対して動的横荷重が作用すると Δ が2r程度までは対称な非線形曲げ振動、 Δ がさらに大きくなると対称な曲げ振動に基づく動的脆い移りが生ずることが予想される。本論はかかる偏平アーチの非線形振動特性を検討したものである。

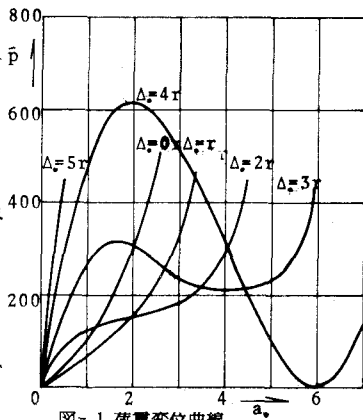


図-1 荷重変位曲線

2. 解法 初期変形をもつ一様断面の偏平アーチに周期的変動荷重が作用する場合の非線形振動問題を対象とする。次の仮定(a)~(f)を用いれば、本題の運動方程式が式(1)に示すようにえられる。

仮定 (a) $l \gg r$ (b) $E \ll 1$ Hookeの法則 (c) $u \ll r$ (d) $y=0(r)$, $|\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}| \ll 1$, $(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2})^2 = 0(E)$
 (e) $y=0(r)$ (f) Bernoulli-Eulerの仮定 (g) 軸方向、回転慣性無視 (h) 両端で軸方向変位拘束
 基礎式 $EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{EA}{2l} \left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y_0}{\partial x} \right\} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} + P A \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - P \cos \Omega t = 0$ (1)

ここに、 E : はりのヤング率、 I : 断面2次モーメント、 A : 断面積、 l : スパン、 y : たわみ、

y_0 : 初期たわみ、 ρ : 密度、 x : スパン方向の座標、 P : 荷重強度、 Ω : 外力の円振動数

式(1)を解くために、たわみ y を次のように変数分離形に仮定する。

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) \quad (2) \quad \text{ここに、} X_n(x): \text{境界条件を満足する座標関数、} T_n(t): \text{未知の時間関数}$$

また、初期たわみも境界条件を満足しなければならないから、次のように仮定することができる。

$$y_0 = \Delta_0 \bar{X}(x) \quad (3) \quad \text{ここに、} \Delta_0: \text{初期たわみの大きさ、} \bar{X}(x): \text{初期たわみの形状関数}$$

式(3)および式(2)を式(1)の釣合式に代入して、Galerkin法を適用すれば、次のような時間に関する連立非線形常微分方程式がえられる。なお、座標関数にははりの線形曲げ振動の規準関数を用いることにする。

$$\ddot{T}_n + \alpha_n^2 T_n + K_n \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{nkm}^* T_k T_l T_m + K_n \Delta_0 \left(\sum_{m=1}^{\infty} Q_m^* R_{nm} T_k T_m + \frac{1}{2} S_n^* \sum_{m=1}^{\infty} R_{nm} T_k T_l \right) + K_n \Delta_0^2 S_n^* \sum_{m=1}^{\infty} Q_m^* T_k T_l = \Delta_0 \bar{P} \cos \bar{\omega} t \quad (4)$$

$$\text{ここに、} \alpha_n = \omega_n / \omega_0, \quad \delta_n = \int_0^l \bar{X}_n^2 dx, \quad Q_n^* = \int_0^l \bar{X}_n \bar{X}_0^2 dx, \quad R_n = \int_0^l \bar{X}_n \bar{X}_0 dx, \quad S_n^* = \int_0^l \bar{X}_n^3 dx, \quad A_{nkm}^* = \frac{1}{2} R_{nm} R_{kn}$$

$$\bar{A}_n = E \int_0^l \bar{X}_n dx, \quad \bar{E}_n = \int_0^l \bar{X}_n^2 dx, \quad K_n = \frac{1}{\bar{E}_n}, \quad \lambda = l \sqrt{PA \omega_0^2 EI}, \quad \bar{\omega} = \omega / \omega_0, \quad T = \omega_0 t, \quad \bar{P} = P l^3 / EI r$$

式(4)において、第3項が3次の非線形項を、また、第4項が初期変形による2次の非線形項を、第5項が初期変形による線形項を表わしている。初期変形の影響はそれぞれ線形項に自乗のオーダー、非線形項に1次のオーダーで効いてくることがわかる。式(4)の厳密解をうることは不可能であるから、再び近似解法を適用しなければならないが、非線形項の大きな本題には調和バランス法を用いることにする。復元力が2次、3次の式であることおよび減衰力が存在しないことを考慮すると、解を次のようにFourier級数の形に仮定することができる。

$$T_n = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k^n \cos k \bar{\omega} t \quad (5) \quad \text{ここに、} Q_k^n: \text{未定定数}$$

式(5)を式(4)に代入して非線形項に含まれる $\cos$ 関数の積を三角関数の加法定理を用いて展開のうえ、 $\cos$ の各調

表の係数を比較すれば、未定定数 Q_0 に関する連立非線形代数方程式がえられる。これをNewton-Raphson法により解けば Q_0 を決定することはでき、本題が解けることになる。

5. 計算例 両端にバネの偏平アーチの形状が正弦波 $Q_0 = \Delta_0 \sin \pi x$ で与えられる場合について、系を1自由度系と仮定すれば、式(4)は次のように書き改められる。

$$\ddot{T} + (1 + \frac{1}{2}\Delta_0)T + \frac{3}{8}\Delta_0 T^2 + \frac{1}{4}T^3 = \frac{4}{\pi}P \cos \omega t \quad (6)$$

$$\text{式(5)の級数を2項まで採用すれば } T = Q_0 + Q_1 \cos \omega t \quad (7)$$

式(7)を式(6)に代入して調和バランス法を適用すれば、次の2元連立非線形代数方程式がえられる。

$$(1 + \frac{1}{2}\Delta_0)Q_0 + \frac{1}{4}(Q_0^2 + \frac{3}{2}Q_0 Q_1^2) + \frac{3}{8}(Q_1^2 + \frac{1}{2}Q_1^2)\Delta_0 = 0 \quad (8)$$

$$(1 + \frac{1}{2}\Delta_0 - \omega^2)Q_1 + \frac{3}{4}(Q_0 Q_1 + \frac{1}{4}Q_1^3) + \frac{3}{2}Q_0 Q_1 \Delta_0 = \frac{4}{\pi}P$$

任意の振動数 ω に対して、式(8)を解けば振動数 ω と振幅の変動成分 Q_1 および直線成分 Q_0 との関係が図-2および図-3のようにえられる。図-2より明らかなように、ライズ Δ_0 が回転半径程度までは、はりとしての振動が可能であるが、 Δ_0 がより大きくなると、アーチとしての微小振幅をして平衡点のまわり($Q_0 \approx 0$)で振動する。これに対して振幅 Q_0 が増大するにつれて、振動の中心が平衡点から曲率を打ち消す方向に移動し、これに伴って振動はますますなはり状の振動($Q_0 \rightarrow \Delta_0$)となり、振動数は減少し、軟化バネの挙動を示す。さらに振幅が増大していくと振動の中心はますますなはりと同じ($Q_0 = -\Delta_0$)になり、振動数は振幅の増大とともに増加し、硬化バネの挙動を示す。初期変形の影響は線形項に対しては2次のオーダー、非線形項には1次のオーダーで関係するため、振幅が大きい領域では初期変形の影響は小さくなっていることがわかる。

図-4に動的な外力が作用する場合の定常強制振動の応答曲線を示す。図にない？横軸は外力の円振動数を、ま？なはりの1次の固有円振動数で割った振動数比を、縦軸は振幅の絶対値を示した。また、実線は外力と同位相の振動を示し、点線は外力と逆位相の振動を示す。自由振動の背骨曲線($P=0$)が軟化、硬化バネの両特性をもつために、応答の様相は初期変形のない場合に対してはるかに複雑となる。外力と同位相の振動をもつ応答曲線は鉛直接線を2個もつために、これらの点で囲まれる領域は不安定となることが予想されるために、これらの鉛直接線の位置で飛び降りが起こるものと考えられる。

4. 結語 本論では偏平アーチの非線形振動挙動を1自由度として取り扱ったが、振幅の安定判別、多自由度系としての取り扱い、対称な飛び降り座屈、非対称な係数励振による分岐飛び降り座屈について今後検討する予定である。

参考文献 1) 八巻：弾性体の非線形振動、日本機械学会第373回講習会「非線形振動の理論と実験」昭和48年2月

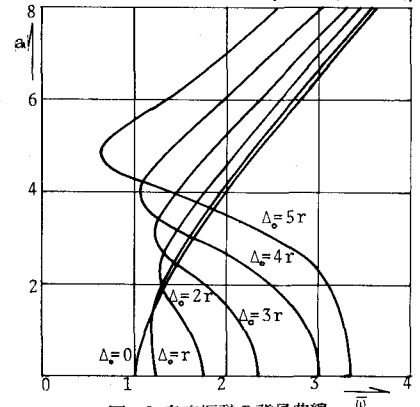


図-2 自由振動の背骨曲線

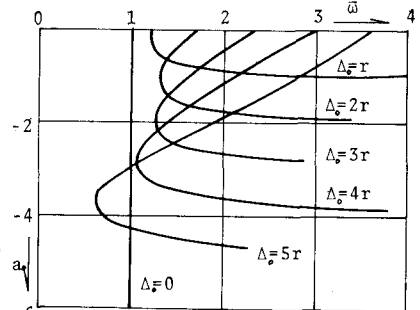


図-3 振幅の直流成分

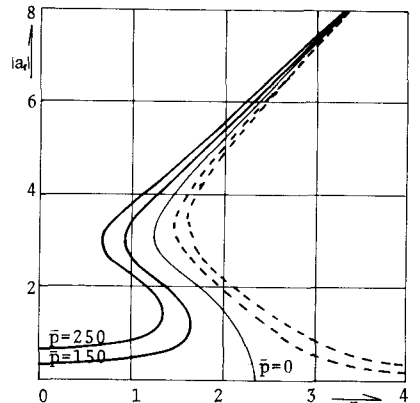


図-4 振動数-応答曲線