

秋田大学 土木工学科 学生員 瀧内健仁
秋田大学 土木工学科 正員 稼農知徳

1. まえがき

鋼床板上に敷設されるアスファルト舗装は、鋼床板が走行車両等により振動を受ける際、振動減衰にかなり影響を与える。この影響を検討する為、基礎的な粘弾性層を有する複合梁の解析を行った。モデルとして、両面に金属層を持ち、心材として粘弾性層を持つ梁を考える。解析には、有限要素法を適用し、初めに、三層梁の変位関数を仮定し、節点変位ベクトルと、節点カベクトルを定義し、弾性層と粘弾性層の歪成分を、節点変位成分で表示する。梁の、歪エネルギーの変分をとり、マトリクス表示して、整理し、さらに分布横荷重・慣性力と等価な節点外力を求める。梁系に対する仮想仕事原理より、剛性方程式が誘導される。ここで粘弾性体を、広義の弾性率を持つ弾性体で表す為、 $G^* = i\omega\eta + G'$ の複素数表示される複素弾性率を導入する。従って剛性マトリクスは、複素剛性マトリクスとなり、実数部と虚数部に分解して解くと節点変位を求める事ができる。

2. 三層梁の曲げ理論

Fig-1に、粘弾性層を持つ三層梁を示す。表層が、弾性層の金属板で、心材が粘弾性層とする。

この解析には次の仮定を設ける。

- 1) 各層のたわみ w は等しい。
- 2) 粘弾性層は断面力を受け持たない。
- 3) 各層間の境界では滑りはない。

Fig-1より各層の歪は次式で表わされる。

$$\epsilon_{xi} = \frac{\partial u_i}{\partial x} - z_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \epsilon_i = \frac{\partial u_i}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1)$$

u_i : 各層中央面の x 方向変位 w : 垂直変位

(1)式と、仮定3)より、弾性層の直ひずみと、粘弾性層のせん断歪は、次式で表わされる。

$$\epsilon_{x1} = \frac{\partial u_1}{\partial x} - z_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \epsilon_{x3} = \frac{\partial u_3}{\partial x} - z_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{z h_2} (u_3 - u_1 + c \frac{\partial w}{\partial x}) \quad (2)$$

$$c = h_1 + 2h_2 + h_3$$

3. 三層梁の有限要素法解析

変位関数 $w(x) = H(x) \{a\}$

$$u_1(x) = h(x) \{b\} \quad u_3(x) = k(x) \{c\} \quad (3)$$

ここで、 $H(x) = [1 \ x \ x^2 \ x^3]$ $h(x) = [1 \ x]$

$\{a\}^T = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3]$ $\{b\}^T = [b_0 \ b_1]$ $\{c\}^T = [c_0 \ c_1]$ 節点変位ベクトル・節点カベクトルを次の

ように定義する。 $\{w\}^T = [w_i \ \phi_i \ w_j \ \phi_j]$ $\{u_1\}^T = [u_{1i}, u_{1j}]$ $\{u_3\}^T = [u_{3i}, u_{3j}]$ $\{P_1\}^T = [P_i \ P_j]$

$\{P_3\}^T = [P_i \ P_j]$ $\{Q\}^T = [Q_i \ M_i \ Q_j \ M_j]$ (4) (3)(4)式より、 $\{w\} = [A] \{a\}$

$\{u_1\} = [B] \{b\}$ $\{u_3\} = [B] \{c\}$ 従って、(3)式は、ここで

$$w(x) = [H] [A^{-1}] \{w\} \quad u_1(x) = [h] [B^{-1}] \{u_1\}$$

$$u_3(x) = [k] [B^{-1}] \{u_3\} \text{ となる。}$$

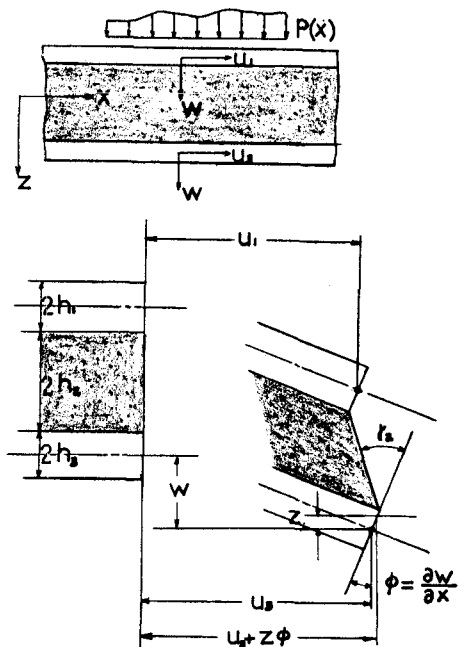


Fig-1

$$[A^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad [B^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

梁の歪エネルギーの変分 $\delta \Pi_i$ を求める。

$$\delta \Pi_i = \iiint \delta \epsilon^T \delta dV = \int_0^L \delta \epsilon_1 \delta_1 dA_1 dx + \int_0^L \delta \epsilon_3 \delta_3 dA_3 dx + \int_0^L \delta \epsilon_2 \delta_2 dA_2 dx \quad (5)$$

ここで、 $\epsilon_1 = [h_x][B^{-1}]\{u_1\} - Z_1[H_{xx}][A^{-1}]\{w\}$, $\epsilon_3 = [h_x][B^{-1}]\{u_3\} - Z_3[H_{xx}][A^{-1}]\{w\}$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{2h_z} \left[[h][B^{-1}]\{\{u_3\} - \{u_1\}\} + e[H_{xx}][A^{-1}]\{w\} \right]$$

式(5)をマトリクス表示して整理する。

$$\delta \Pi_i = [\delta\{u_1\}, \delta\{u_3\}, \delta\{w\}] \begin{bmatrix} K_{u1u1} & K_{u1u3} & K_{u1w} \\ K_{u3u1} & K_{u3u3} & K_{u3w} \\ K_{wu1} & K_{wu3} & K_{ww} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_1\} \\ \{u_3\} \\ \{w\} \end{Bmatrix} \quad (6) \quad \begin{bmatrix} K_{u1u1} & \dots & K_{u1w} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{wu1} & \dots & K_{ww} \end{bmatrix} \text{は複素剛性マトリクス}$$

分布荷重 $P(x)$ のなす仮想仕事 $\delta \Pi_e$ を計算し、外荷重と等価な節点外力成分を求める。

$$Q = \frac{\delta \Pi_e}{\delta w}$$

同様に慣性力と等価な節点外力を求める。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} Q_i \\ M_i \\ Q_j \\ M_j \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{L^2} & \frac{2}{L^3} \\ 0 & 1 & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L^3} \\ 0 & 0 & \frac{6}{L^2} & -\frac{2}{L^3} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L^3} \end{bmatrix} \quad (7) \quad \bar{Q} = \frac{\delta \Pi_m}{\delta w} = m \{\ddot{w}\} \quad \bar{Q}; \text{節点外力} \\ m &= [A^{-1}]^T \bar{m} [A^{-1}] = [A^{-1}] \int_0^L [H]^T \frac{\rho A}{g} [H] dx [A^{-1}] = \frac{\rho A L}{g} \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11L}{210} & \frac{9}{70} & \frac{13L}{420} \\ \frac{11L}{210} & \frac{L^2}{105} & \frac{13L}{420} & \frac{L^2}{140} \\ \frac{9}{70} & \frac{13L}{420} & \frac{13}{35} & -\frac{11L}{210} \\ \frac{13L}{420} & \frac{L^2}{140} & -\frac{11L}{210} & \frac{L^2}{105} \end{bmatrix} \\ &\quad \text{Symm} \quad \frac{L^2}{105} \\ m; &\text{質量マトリクス} \quad \rho; \text{単位体積重量} \end{aligned} \quad (8)$$

ここで $F_{xi} = \int_0^L p(x) x^i dx \quad i=0,1,2,3$

g ; 重力加速度 A ; 梁の断面積

梁系に対する仮想仕事の原理より、(9)が成立する。 $[K(i\omega)] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ w \end{Bmatrix} + m \{\ddot{w}\} = \begin{Bmatrix} P \\ P \\ Q \end{Bmatrix} \quad (9)$

複素剛性マトリクス $[K(i\omega)] = [G] + i[H]$ と表わす。

$$[G] = \begin{bmatrix} K_{u1u1} & K_{u1u3} & K_{u1w} \\ K_{u3u1} & K_{u3u3} & K_{u3w} \\ K_{wu1} & K_{wu3} & K_{ww} \end{bmatrix} \quad [H] = \begin{bmatrix} K_{u1u1} & K_{u1u3} & K_{u1w} \\ K_{u3u1} & K_{u3u3} & K_{u3w} \\ K_{wu1} & K_{wu3} & K_{ww} \end{bmatrix} \quad K_{u1u1} = \int_0^L [n_x]^T E_1 [n_x] dA_1 + \int_0^L [n]^T G' [n] dA_2$$

$$K_{u3u3} = \int_0^L [N_x]^T E_3 [N_x] dA_3 + \int_0^L [n]^T G' [n] dA_2 dx$$

$$K_{u1w} = \int_0^L [N_x]^T E_3 [n_x] dA_3 dx + \int_0^L [N_{xx}]^T E_3 [N_{xx}] dA_3 + \int_0^L [N_x]^T G' [N_x] dA_2$$

$$K_{u3w} = - \int_0^L G' [n]^T [n] dA_2 dx \quad K_{wu1} = - \int_0^L [N_{xx}]^T E_1 [n_x] dA_1 dx - \int_0^L [N_x]^T G' [n] dA_2 dx$$

$$K_{wu3} = - \int_0^L [N_{xx}]^T E_3 [n_x] dA_3 + \int_0^L [N_x]^T G' [n] dA_2 \quad K_{u1u3} = K_{u3u1}^T \quad K_{u1w} = K_{wu1}^T \quad K_{u3w} = K_{wu3}^T \quad (10)$$

$$K_{u1u1}' = \int_0^L [n]^T \eta' \omega dA_2 dx \quad K_{u3u3}' = \int_0^L [N_x]^T \eta' \omega [N_x] dA_2 dx \quad K_{u1w}' = \int_0^L [N_x]^T \eta' \omega [N_x] dA_2 dx$$

$$K_{u3w}' = - \int_0^L \eta' \omega [n]^T [n] dA_2 dx \quad K_{wu1}' = - \int_0^L [N_x]^T \eta' \omega [N_x] dA_2 dx \quad K_{wu3}' = \int_0^L [N_x]^T \eta' \omega [N_x] dA_2 dx$$

$$K_{u1w}' = K_{wu1}'^T \quad K_{u3w}' = K_{wu3}'^T \quad K_{u1u3}' = K_{u3u1}'^T \quad \text{ここで: } [n] = \frac{1}{2h_z} [h][B^{-1}] = \frac{1}{2h_z} \left[1 - \frac{x}{L}, \frac{x}{L} \right]$$

$$[N_x] = [h_x][B^{-1}] = \left[-\frac{1}{L}, \frac{1}{L} \right] \quad [N_{xx}] = \frac{e}{2h_z} [H_x][A^{-1}] = \frac{e}{2h_z} \left[\frac{6}{L^2}x + \frac{6}{L^3}x^2, -\frac{4}{L^2}x + \frac{6}{L^3}x^2, \frac{6}{L^2}x - \frac{6}{L^3}x^2, -\frac{2}{L^2}x + \frac{6}{L^3}x^2 \right]$$

$$[N_{xx}] = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_3 \end{bmatrix} [H_{xx}][A^{-1}] = Z \left[-\frac{6}{L^2} + \frac{12}{L^3}x, -\frac{4}{L^2} + \frac{6}{L^3}x, \frac{6}{L^2} - \frac{12}{L^3}x, -\frac{2}{L^2} + \frac{6}{L^3}x \right]$$

周期的変化を取り扱い $u_1 = u_1^* e^{i\omega t}$ $u_3 = u_3^* e^{i\omega t}$ $w = w^* e^{i\omega t}$ $P_1 = P_1^* e^{i\omega t}$ $P_3 = P_3^* e^{i\omega t}$

$Q^* = Q^* e^{i\omega t}$ とおく。さらに節点変位及び外力の振幅を一般に複素数として、 $u_1^* = \{s\} + i\{t\}$

$u_3^* = \{p\} + i\{q\}$ $w^* = \{z\} + i\{u\}$ $P_1^* = \{a\} + i\{b\}$ $P_3^* = \{c\} + i\{d\}$ $Q^* = \{e\} + i\{f\}$

と置く。以上の関係を、(9)(10)式に代入し、実数部・虚数部に整理し、(11)(12)式を得る。

$$[-[M]\omega^2 + [G]]\{s\} - [H]\{t\} = \{\alpha\} \quad (11) \quad [H]\{s\} + [-[M]\omega^2 + [G]]\{t\} = \{\beta\} \quad (12)$$

ここで、 $[G][H]$ は、(10)式で表わされるものであり、(11)(12)式を解いて、 $\{s\}$ と $\{t\}$ を求め

る事により所要の節点変位が、複素数 $\{u^*\} = [u_1^* \ u_3^* \ w^*]^T$ として得られる。ここで $\{s\}^T =$

$\{\{s\} \ \{p\} \ \{z\}\}$ $\{t\}^T = \{\{t\} \ \{q\} \ \{u\}\}$ $\{\alpha\}^T = \{\{a\} \ \{c\} \ \{e\}\}$ $\{\beta\}^T = \{\{b\} \ \{d\} \ \{f\}\}$ である。

4. 参考文献 山田嘉昭; 「塑性・粘弾性」 日本鋼構造協会, 立原・浦田・安田; 「粘弾性層を持つ部分多層梁の振動解析」 機械学会論文集 No.335号, R.A.D. Larranzi; 「Theory of Vibratory Bonding for Elastic and Viscoelastic Layered Finite Length Beams」 J.A.M 488